Bernoulli Resolve

Matemática

6V Volume 5

istockphoto

Sumário - Matemática

Módulo A

Módulo B

Módulo C

Módulo D

Módulo E

COMENTÁRIO E RESOLUÇÃO DE QUESTÕES

MÓDULO – A 09

Combinações I

Exercícios de Fixação

Questão 01 – Letra D

Comentário: Do total de comissões ($C_{8, 4}$), devemos retirar as comissões nas quais Gustavo e Danilo estão juntos ($C_{6, 2}$). Assim, temos:

$$C_{8, 4} - C_{6, 2} = \frac{8!}{4!.4!} - \frac{6!}{4!.2!} = 70 - 15 = 55$$

Questão 02 – Letra C

Comentário: Qualquer júri composto por sete membros sempre terá um advogado, já que o número de jurados que não são advogados é apenas 6.

Portanto, o número de júris com pelo menos um advogado será dado por:

$$C_{10, 7} = \frac{10!}{7!.3!} = 120$$

Questão 03 – Letra C

Comentário: Para que a soma seja ímpar, devemos ter 3 números ímpares ou 2 pares e 1 ímpar. Assim, temos duas situações:

I) Escolher 3 números ímpares: $C_{10, 3} = \frac{10!}{7!.3!} = 120$

II) Escolher 2 números pares e 1 ímpar:

$$C_{10, 2}.C_{10, 1} = \frac{10!}{8!.2!}.\frac{10!}{9!.1!} = 450$$

Total = 120 + 450 = 570

Questão 04 – Letra D

Comentário: Para formar a comissão, dos 6 rapazes, devemos escolher 3, e, das 8 moças, escolhemos 5, ou seja:

$$C_{6, 3}.C_{8, 5} = \frac{6!}{3!.3!}.\frac{8!}{5!.3!} = 20.56 = 1\,120$$

Assim, pode-se formar a comissão de 1 120 modos diferentes.

Questão 05 – Letra E

Comentário: Do total de escolhas de 4 itens ($C_{13, 4}$), devemos retirar as formadas apenas por alimentos não perecíveis ($C_{5, 4}$) e também aquelas formadas apenas por produtos de limpeza ($C_{8, 4}$). Logo, temos:

$$C_{13, 4} - C_{5, 4} - C_{8, 4} = \frac{13!}{9!.4!} - \frac{5!}{1!.4!} - \frac{8!}{4!.4!} = 640$$

Exercícios Propostos

Questão 01 – Letra B

Comentário: Do total de escolhas possíveis ($C_{10, 8}$), devemos retirar as seguintes:

I) Escolhas nas quais a primeira e a segunda questões são respondidas: $C_{8, 6}$

II) Escolhas nas quais nem a primeira nem a segunda questão são respondidas: $C_{8, 8}$

Portanto, temos:

$$C_{10, 8} - C_{8, 6} - C_{8, 8} = \frac{10!}{2!.8!} - \frac{8!}{2!.6!} - \frac{8!}{0!.8!} = 16$$

Questão 04 – Letra A

Comentário: Seja **n** a quantidade de saladas de frutas que podem ser feitas considerando apenas os tipos de frutas. Como as saladas são feitas misturando-se pelo menos duas frutas, temos:

$$n = C_{5, 2} + C_{5, 3} + C_{5, 4} + C_{5, 5}$$

$$n = \frac{5!}{2!3!} + \frac{5!}{3!2!} + \frac{5!}{4!1!} + \frac{5!}{5!0!}$$

$n = 10 + 10 + 5 + 1 \quad n = 26$

Questão 06 – Letra A

Comentário: Escolher o pão: $C_{3, 1} = \frac{3!}{2!.1!} = 3$ e

Escolher um (1) recheio: $C_{10, 1} = \frac{10!}{9!.1!} = 10$ ou

Escolher dois (2) recheios: $C_{10, 2} = \frac{10!}{8!.2!} = 45$ ou

Escolher três (3) recheios: $C_{10, 3} = \frac{10!}{7!.3!} = 120$

Portanto, temos 3.(10 + 45 + 120) = 525 possibilidades.

Questão 07

Comentário: O total de jogos é igual a $C_{10, 2} = \frac{10!}{8!.2!} = 45$.

Somando os pontos das equipes, temos 118 pontos. Sendo **V** e **E** o número de jogos que terminaram em vitória e em empate, respectivamente, temos o sistema:

$$\begin{cases} V + E = 45 \\ 3V + 2E = 118 \end{cases}$$

Resolvendo-o, V = 28 e E = 17.

Portanto, 17 jogos terminaram empatados.

Questão 10 – Letra A

Comentário: Basta escolhermos os 7 alunos que ocuparão uma das salas. Desse modo, os 3 alunos que ocuparão a outra sala estão automaticamente determinados.

$$C_{10, 7} = \frac{10!}{3!.7!} = 120$$

Questão 12 – Letra B

Comentário: Total de quadriláteros formados:

$$\underbrace{C_{4,2}}_{\substack{2\text{ pontos}\\ \text{em } \mathbf{r}}} \cdot \underbrace{C_{n-4,2}}_{\substack{2\text{ pontos}\\ \text{na outra reta}}} = \frac{4!}{2!.2!} \cdot \frac{(n-4)!}{(n-6)!.2!} = 126 \Rightarrow$$

$$6.\frac{(n-4).(n-5).(n-6)!}{(n-6)!.2} = 126$$

$$n^2 - 9n - 22 = 0 \Rightarrow \begin{cases} n_1 = -2 \text{ (não convém)} \\ \text{ou} \\ n_2 = 11 \text{ (convém)} \end{cases}$$

Portanto, n = 11, ou seja, é um número primo.

Questão 14 – Letra B

Comentário: Basta que o general escolha **r** soldados para o ataque frontal. Como r + s = n, o grupo com **s** soldados da retaguarda está automaticamente determinado. Temos:

$$C_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!.r!} = \frac{n!}{s!.r!}$$

Questão 16

Comentário: Total de jogos disputados:

$$2.C_{10,2} = 2.\frac{10!}{8!.2!} = 90$$

Sendo **V** e **E** o número de partidas terminadas em vitória e empate, respectivamente, temos o sistema $\begin{cases} V + E = 90 \\ 3V + 2E = 231 \end{cases}$

em que V = 51 e E = 39.

Portanto, houve 51 vitórias e 39 empates.

Seção Enem

Questão 01 – Letra A

Eixo cognitivo: II

Competência de área: 1

Habilidade: 2

Comentário: Inicialmente, para escolhermos os times para o Grupo **A**, temos uma combinação, pois a ordem dos times não é importante. Em seguida, para escolhermos os times do jogo de abertura, temos um arranjo, pois a ordem é importante (jogos de ida e volta).

Questão 02 – Letra D

Eixo cognitivo: II

Competência de área: 1

Habilidade: 2

Comentário: Há duas possibilidades:

1ª possibilidade: Comprar 2 objetos de artesanato e 1 peça de roupa.

$$\underbrace{C_{6,2}}_{\substack{\text{objetos}\\ \text{de artesanato}}} \cdot \underbrace{C_{4,1}}_{\text{peça de roupa}} = \frac{6!}{4!.2!} \cdot \frac{4!}{3!.1!} = 60$$

2ª possibilidade: Comprar 1 objeto de artesanato e 2 peças de roupa.

$$\underbrace{C_{6,1}}_{\substack{\text{objeto}\\ \text{de artesanato}}} \cdot \underbrace{C_{4,2}}_{\text{peças de roupa}} = \frac{6!}{5!.1!} \cdot \frac{4!}{2!.2!} = 36$$

Total de grupos de presentes: 60 + 36 = 96

MÓDULO – A 10

Combinações II

Exercícios de Fixação

Questão 01 – Letra B

Comentário: Sabendo que a placa do país **X** é composta por 3 letras e 3 algarismos em qualquer ordem, temos $\frac{6!}{3!3!} = 20$ possíveis disposições envolvendo letras e algarismos. Assim, como o número máximo de placas distintas que podem ser confeccionadas no país **X** é igual a **n**, temos:

$$n = 20.26.26.26.10.10.10 = 2.26^3.10^4$$

Para o país **Y**, a condição é que o bloco das 3 letras esteja à esquerda do bloco dos 4 algarismos. O número máximo de placas distintas é **p**, então:

p = 26.26.26.10.10.10.10

Logo, $\frac{n}{p} = \frac{2.26^3.10^4}{26^3.10^4} = 2.$

Questão 02 – Letra B

Comentário:

i) Em uma das margens, temos:

$$C_{8,1}.C_{5,3} = \frac{8!}{7!.1!}.\frac{5!}{2!.3!} = 80$$

ii) Na outra margem, temos:

$$C_{8,3}.C_{5,1} = \frac{8!}{5!.3!}.\frac{5!}{4!.1!} = 280$$

Total = 80 + 280 = 360

Questão 03 – Letra E

Comentário: De acordo com as informações, temos que os números que irão figurar nas faces opostas do dado constituem os seguintes pares:

(1, 19), (2, 18), (3, 17), (4, 16), (5, 15), (6, 14), (7, 13), (8, 12) e (9, 11)

Assim, para escolher as 4 faces com números ímpares, basta escolhermos dois entre os 5 pares mencionados: $C_{5,2} = \frac{5!}{2!3!} = 10$ modos

Resta selecionar 2 faces com números pares: $C_{4,1} = \frac{4!}{1!3!} = 4$ modos.

Portanto, o resultado pedido é 10.4 = 40.

Questão 04 – Letra B

Comentário: Sejam $\begin{cases} \mathbf{n} \text{ homens} \\ 37 - n \text{ mulheres} \end{cases}$

Total de apertos de mão:

$$\underbrace{2.C_{n,2}}_{\substack{\text{Apertos entre}\\ \text{dois homens}}} + \underbrace{C_{n,1}.C_{37-n,1}}_{\substack{\text{Apertos entre}\\ \text{1 homem e 1 mulher}}} = 720 \Rightarrow$$

$$2.\frac{n!}{(n-2)!.2!} + \frac{n!}{(n-1)!.1!}.\frac{(37-n)!}{(37-n-1)!.1} \Rightarrow$$

$$\frac{n.(n-1).(n-2)!}{(n-2)!} + \frac{n(n-1)!}{(n-1)!}.\frac{(37-n).(36-n)!}{(36-n)!} \Rightarrow$$

$n^2 - n - n^2 + 37n = 720 \Rightarrow 36n = 720 \Rightarrow n = 20$

Portanto, há 37 – 20 = 17 mulheres.

Questão 05 – Letra C

Comentário: A patrulha é formada por 1 sargento, 1 cabo e 4 soldados. Assim, temos:

$$\underbrace{C_{2,1}}_{\text{1 sargento}} . \underbrace{C_{3,1}}_{\text{1 cabo}} . \underbrace{C_{12,4}}_{\text{4 soldados}} = \frac{2!}{1!.1!}.\frac{3!}{2!.1!}.\frac{12!}{8!.4!} = 2\,970$$

Exercícios Propostos

Questão 01 – Letra A

Comentário: Do total de comissões, devemos retirar aquelas que contêm Andreia, Manoel e Alberto, as que contêm apenas Andreia e Manoel e as que contêm apenas Andreia e Alberto. Logo:

$$\underbrace{C_{9,5}}_{\text{total}} - \underbrace{C_{6,2}}_{\text{Andreia, Manoel e Alberto}} - \underbrace{C_{6,3}}_{\text{Andreia e Manoel}} - \underbrace{C_{6,3}}_{\text{Andreia e Alberto}} =$$

$$\frac{9!}{4!.5!} - \frac{6!}{4!.2!} - \frac{6!}{3!.3!} - \frac{6!}{3!.3!} = 71 \text{ comissões}$$

Questão 02 – Letra C

Comentário:

1º jogador = $C_{28,7}$

2º jogador = $C_{21,7}$

3º jogador = $C_{14,7}$

4º jogador = $C_{7,7}$

$$C_{28,7}.C_{21,7}.C_{14,7}.C_{7,7} = \frac{28!}{21!.7!}.\frac{21!}{14!.7!}.\frac{14!}{7!.7!}.\frac{7!}{0!.7!} = \frac{28!}{(7!)^4}$$

Questão 03 – Letra A

Comentário:

$$\underbrace{A_{14,4}}_{\text{Presidente, vice, secretário e tesoureiro}} . \underbrace{C_{10,4}}_{\text{Conselheiros}} = \frac{14!}{(14-4)!}.\frac{10!}{6!.4!} = \frac{14!}{4!.6!}$$

Questão 05 – Letra E

Comentário: Como João e Pedro não podem dormir na mesma barraca, devemos calcular o total de maneiras de organizar as pessoas, sem restrições, para, em seguida, retirarmos as configurações indesejadas. Temos:

Total: $C_{9,2}.C_{7,3}.C_{4,4} = \frac{9!}{7!.2!}.\frac{7!}{4!.3!}.\frac{4!}{0!.4!} = 1\,260$

João e Pedro na 1ª barraca: $C_{7,3}.C_{4,4} = \frac{7!}{4!.3!}.\frac{4!}{4!.0!} = 35$

João e Pedro na 2ª barraca:

$$C_{7,2}.C_{5,1}.C_{4,4} = \frac{7!}{5!.2!}.\frac{5!}{4!.1!}.\frac{4!}{0!.4!} = 105$$

João e Pedro na 3ª barraca:

$$C_{7,2}.C_{5,3}.C_{2,2} = \frac{7!}{5!.2!}.\frac{5!}{2!.3!}.\frac{2!}{0!.2!} = 210$$

1 260 – 35 – 105 – 210 = 910

Questão 07 – Letra E

Comentário: Temos 8 vértices, dos quais devemos escolher 2.

$$C_{8,2} = \frac{8!}{6!.2!} = 28$$

Questão 08

Comentário: O passageiro levará, obrigatoriamente, 700 g (dicionário + livro em alemão). Logo, há mais de 1 300 g que podem ser distribuídos dos seguintes modos:

I) 4 de 200 g e 1 de 500 g: $C_{9,4}.C_{3,1} = \frac{9!}{5!.4!}.\frac{3!}{2!.1!} = 378$

II) 2 de 200 g, 1 de 400 g e 1 de 500 g:

$$C_{9,2}.C_{6,1}.C_{3,1} = \frac{9!}{7!.2!}.\frac{6!}{5!.1!}.\frac{3!}{2!.1!} = 648$$

III) 2 de 400 g e 1 de 500 g: $C_{6,2}.C_{3,1} = \frac{6!}{4!.2!}.\frac{3!}{2!.1!} = 45$

Total = 378 + 648 + 45 = 1 071 modos

Questão 09 – Letra A

Comentário: Possibilidades:

I) 3 números negativos: $C_{20,3} = \frac{20!}{17!.3!} = 1\,140$

II) 1 número negativo e 2 números positivos:

$$C_{20,1}.C_{20,2} = \frac{20!}{19!.1!}.\frac{20!}{18!.2!} = 3\,800$$

Total = 1 140 + 3 800 = 4 940

Questão 10

Comentário:

A) Escolher o pão: $C_{3,1} = \frac{3!}{2!.1!} = 3$

Escolher o tamanho: $C_{2,1} = \frac{2!}{1!.1!} = 2$

Escolher o recheio:

$C_{5,1} + C_{5,2} + C_{5,3} + C_{5,4} + C_{5,5} =$

$$\frac{5!}{4!.1!} + \frac{5!}{3!.2!} + \frac{5!}{2!.3!} + \frac{5!}{1!.4!} + \frac{5!}{0!.5!} = 31$$

Total = 3.2.31 = 186 sanduíches

B) Pão: $C_{2,1} = \frac{2!}{1!.1!} = 2$

Tamanho: $C_{1,1} = \frac{1!}{0!.1!} = 1$

Recheio: $C_{5,2} = \frac{5!}{3!.2!} = 10$

Total = 2.1.10 = 20 sanduíches

Questão 11

Comentário: Do total de comissões possíveis, devemos retirar aquelas que são formadas apenas por rapazes. Temos:

$$C_{9,5} - C_{5,5} = \frac{9!}{4!.5!} - \frac{5!}{0!.5!} = 125 \text{ comissões}$$

Questão 13 – Letra C

Comentário: Há $C_{6,4} = \frac{6!}{4!2!}$ modos de selecionar 4 químicos; $C_{3,1}$ = 3 modos de selecionar 1 engenheiro ambiental e $C_{4,2} = \frac{4!}{2!2!}$ modos de selecionar 2 engenheiros de produção. Portanto, pelo Princípio Fundamental da Contagem, podemos formar uma equipe de $\frac{6!}{4!2!}\ 3\ \frac{4!}{2!2!} = 6!\ \frac{3}{2.2.2} = 6!.\frac{3}{8}$ maneiras.

Questão 18 – Letra B

Comentário: Sabendo que o apostador foi contemplado com a Sena, vamos agora considerar as Quinas. Temos que, dos 20 números escolhidos, 6 foram sorteados e 14 não. Então, para cada jogo com exatamente 5 números premiados (Quina), temos 14 opções para o sexto número.

Escolhendo jogos de 5 números na cartela premiada: $C_{6,5}$ = 6 opções

Logo, ele conseguirá 14.6 = 84 apostas.

Seção Enem

Questão 01 – Letra A

Eixo cognitivo: II

Competência de área: 1

Habilidade: 2

Comentário: São 3 postos de controle no estado da Bahia (não considerando o ponto de chegada). Escolhendo as equipes, temos:

Posto 1		Posto 2		Posto 3
$C_{14,\,4}$	.	$C_{10,\,4}$	.	$C_{6,\,4}$

Questão 02 – Letra B

Eixo cognitivo: II

Competência de área: 1

Habilidade: 2

Comentário: Do total de equipes possíveis, devemos retirar aquelas nas quais não há nenhum físico, bem como aquelas nas quais não há nenhum geólogo. Temos:

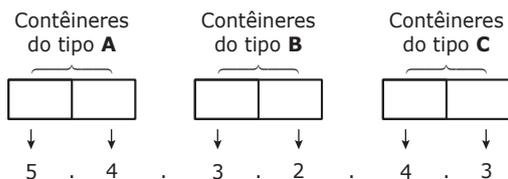
$$C_{20,5} - C_{12,5} - C_{15,5} + C_{7,5} = \frac{20!}{15!.5!} - \frac{12!}{7!.5!} - \frac{15!}{10!.5!} + \frac{7!}{2!.5!} = 11\,730$$

Questão 03 – Letra A

Eixo cognitivo: II

Competência de área: 1

Habilidade: 2

Comentário: Considere a seguinte configuração:

Agora, multiplique esse resultado pelas permutações das duplas de contêiners (P_3).

Temos:

$5.4.3.2.4.3.P_3$ = 1 440.6 = 8 640

MÓDULO – B 09

Cilindros

Exercícios de Fixação

Questão 01 – Letra A

Comentário: Seja r_A o raio do barril do tipo **A**.

Logo, $2\pi r_A = 2a \Rightarrow r_A = \frac{a}{\pi}$.

Daí, o volume do barril do tipo **A** é:

$$V_A = \pi\left(\frac{a}{\pi}\right)^2.a \Rightarrow V_A = \frac{a^3}{\pi}$$

Seja r_B o raio do barril do tipo **B**.

Logo, $2\pi r_B = a \Rightarrow r_B = \frac{a}{2\pi}$.

Daí, o volume do barril do tipo **B** é:

$$V_B = \pi\left(\frac{a}{2\pi}\right)^2.2a \Rightarrow V_B = \frac{a^3}{2\pi}$$

Portanto, $\frac{V_A}{V_B} = \frac{\frac{a^3}{\pi}}{\frac{a^3}{2\pi}} \Rightarrow \frac{V_A}{V_B} = 2 \Rightarrow V_A = 2V_B$.

Questão 02 – Letra A

Comentário: Sendo seu raio R = 25 cm e sua altura H = 60 cm, para determinar sua massa, basta calcular sua área total, excluindo a tampa. Logo:

$A = A_L + A_B \Rightarrow A = 2\pi RH + \pi R^2$

$A = 2\pi.25.60 + \pi.25^2 \Rightarrow A = 50\pi.60 + 625\pi \Rightarrow$

$A = 3\,000\pi + 625\pi \Rightarrow A = 3\,625\pi$ cm²

Para a produção da lata, utiliza-se um metal que possui 0,8 g/cm² de área, logo:

0,8 g _____ 1 cm²

x _____ $3\,625\pi$ cm²

Cada lata possui uma massa de $2\,900\pi$ g.

Questão 03 – Letra D

Comentário: O volume de cada vasilhame, sendo $\pi = 3$, é $V = 3.(0,4)^2.1 \Rightarrow V = 0,48$ m³.

A quantidade de vasilhames para encher 12 000 litros, ou 12 m³, de látex é $\frac{12}{0,48} = 25$.

Questão 04 – Letra B

Comentário: Na maquete, a coluna cilíndrica possui raio R = 1 cm e altura h = 9 cm. Logo, essas duas medidas, em metros, utilizando a escala dada, serão:

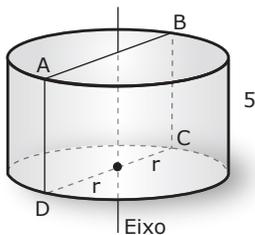
$R = 1.100 = 100 \text{ cm} \Rightarrow R = 1 \text{ m}$

$h = 9.100 = 900 \text{ cm} \Rightarrow R = 9 \text{ m}$

A quantidade de concreto utilizada na coluna será igual ao volume do cilindro; considerando $\pi = 3,14$, temos:

$V = \pi R^2.h \Rightarrow V = 3,14.1^2.9 \Rightarrow V = 28,26$ m³

Questão 05 – Letra B

Comentário: Considere a figura a seguir:

Temos que $A_B = A_{ABCD} \Rightarrow \pi r^2 = 2r.5 \Rightarrow r = \frac{10}{\pi}$.

Logo, o volume do cilindro é:

$$V = \pi r^2.5 \Rightarrow V = \pi\left(\frac{10}{\pi}\right)^2.5 \Rightarrow V = \frac{500}{\pi}\ cm^3$$

Exercícios Propostos

Questão 05 – Letra E

Comentário: O volume V_o da embalagem original, que é um cilindro de raio 5 cm e altura 12 cm, vale:

$V_o = \pi(5)^2 12 = 300\pi$

Como o preço dessa embalagem vale R$ 4,00, então o custo em reais por cm³ vale:

$$C_o = \frac{4}{300\pi} = \frac{1}{75\pi}\ reais/cm^3$$

O volume V_n da nova embalagem, que é um cilindro de raio 4 cm e altura 14 cm, vale:

$V_n = \pi(4)^2 14 = 224\pi$

Como o preço dessa nova embalagem também vale R$ 4,00, então o custo em reais por cm³ vale:

$$C_n = \frac{4}{224\pi} = \frac{1}{56\pi}\ reais/cm^3$$

Dividindo os preços das embalagens, temos:

$$\frac{C_n}{C_o} = \frac{\frac{1}{56\pi}}{\frac{1}{75\pi}} \cong 1,34$$

Portanto, o preço do produto aumentou, aproximadamente, 34%.

Questão 07 – Letra D

Comentário: Para calcularmos a despesa da construção da calçada, basta determinar o volume de concreto utilizado e, para isso, devemos calcular o volume da calçada. Logo, basta, do volume do jardim adicionado ao da calçada, subtrairmos o volume do jardim, assim:

$$V_{calçada} = V_{jardim + calçada} - V_{jardim} \Rightarrow$$
$$V_{calçada} = \pi(9)^2.0,1 - \pi 8^2.0,1 \Rightarrow$$
$$V_{calçada} = 8,1\pi - 6,4\pi \Rightarrow$$
$$V_{calçada} = \pi\ (8,1 - 6,4) \Rightarrow$$
$$V_{calçada} = \underbrace{\pi}_{3,14}.1,7 \Rightarrow V_{calçada} = 5,338\ m^3$$

O preço médio do m³ é de R$ 100,00, logo, o gasto na construção da calçada foi de 5,338.100 = 533,80 reais.

Questão 10 – Letra D

Comentário: Como a embalagem **X** é um cubo cuja aresta mede 9 cm, então seu volume vale:

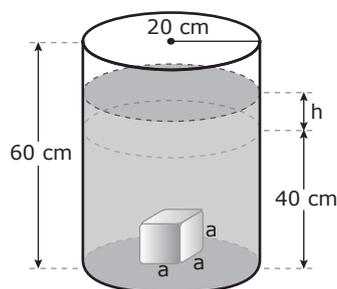
$V_X = (9)^3 = 729\ cm^3$

Já a embalagem **Y** é um cilindro reto cujo diâmetro da base e a altura medem, cada um, 10 cm. Assim, seu volume vale:

$V_Y = \pi(5)^2 10 = 250\pi \cong 785\ cm^3$

Como $V_X < V_Y$, então o volume da embalagem **X** é menor que o volume da embalagem **Y**.

Questão 11 – Letra D

Comentário: Considere a figura a seguir:

Seja **a**, em cm, a aresta do cubo imerso no recipiente cilíndrico.

Como o nível da água subiu 25% ao se imergir o cubo, então temos que o nível da água aumentou:

h = 0,25.40 = 10 cm

Como o volume de água **V** que aumentou equivale ao volume do cubo, então temos:

$$V = V_C \Rightarrow 3(20)^2.(10) = a^3 \Rightarrow a = 10\sqrt[3]{12}$$

Portanto, a aresta do cubo colocado na água vale $10\sqrt[3]{12}$ cm.

Questão 12 – Letra C

Comentário: Os volumes do paralelepípedo e do cilindro são $V_1 = 4x^2\ m^3$ e $V_2 = \pi(0,5)^2.4 = \pi\ m^3$.

Como $\frac{V_1}{V_2} = \frac{2}{\pi}$, temos que $\frac{V_1}{V_2} = \frac{2}{\pi}$ $\frac{4x^2}{\pi} = \frac{2}{\pi}$ $x^2 = \frac{1}{2}$ $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

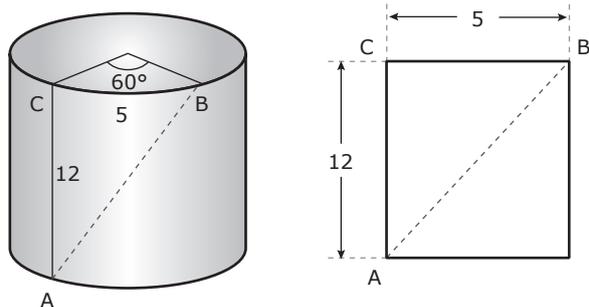
Questão 13 – Letra D

Comentário: Pode-se observar que, com 8 copos de 300 mL, a jarra fica completamente cheia. Logo, o seu volume é igual a 8.300 = 2 400 mL = 2 400 cm³.

Como a jarra possui uma altura de 30 cm, sua área da base é igual a:

$A_{base}.\underbrace{30}_{altura} = 2\ 400$ $A_{base} = 80\ cm^2$

Questão 16 – Letra D

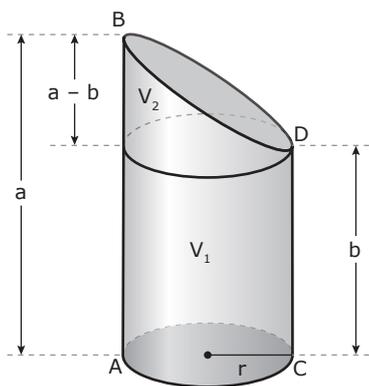
Comentário: Considere a figura a seguir:

O comprimento de BC vale: $BC = \frac{\pi}{3}.\frac{15}{\pi} = 5$

A menor distância entre os pontos **A** e **B** será obtida pela planificação do cilindro, ou seja, basta aplicarmos o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ACB:

$AB^2 = AC^2 + CB^2 \Rightarrow AB^2 = (12)^2 + (5)^2 \Rightarrow$

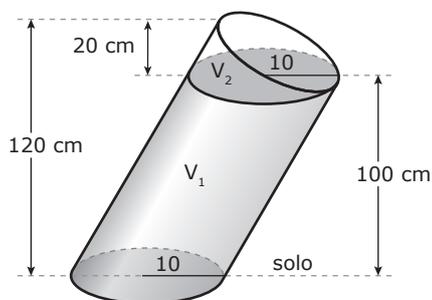
$AB = 13$, pois $AB > 0$

Questão 17

Comentário: Considere a figura a seguir:

O volume **V** do sólido dado vale:

$$V = V_1 + V_2 = \pi r^2 b + \frac{1}{2}.\pi r^2(a - b) = \frac{\pi r^2(a+b)}{2}$$

Questão 18 – Letra A

Comentário: Considere a figura a seguir:

O volume **V** do sólido dado vale:

$$V = V_1 + V_2 = \pi.(10)^2.100 + \frac{1}{2}.\pi.(10)^2.20 = 11\,000\pi$$

Seção Enem

Questão 01 – Letra D

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 2

Habilidade: 8

Comentário: Como as formas 1 e 2 têm a mesma altura **h** e o mesmo volume, então a relação entre **L** e **r** é:

$V_1 = V_2 \Rightarrow L^2h = \pi r^2h \Rightarrow L = r\sqrt{\pi}$

Questão 02 – Letra B

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 2

Habilidade: 8

Comentário: Como houve uma economia de 10% no consumo de água, então haverá no final do dia 10% da altura inicial do reservatório. Assim, temos que:

0,1.6 m = 0,6 m, ou seja, 60 cm

Questão 03 – Letra C

Eixo cognitivo: II

Competência de área: 2

Habilidade: 7

Comentário: O volume do cilindro de raio **r** e altura h_1 vale:

$V_1 = \pi r^2h_1$ (I)

Já o volume do cilindro de raio **R** e altura h_2 vale:

$V = \pi R^2h_2 - \pi r^2h_2$ (II)

Como $R = r\sqrt{2}$ e $h_2 = \frac{h_1}{3}$, então de II temos:

$$V = \pi\left(r\sqrt{2}\right)^2.\frac{h_1}{3} - \frac{\pi r^2h_1}{3} = \frac{\pi r^2h_1}{3}$$

Para encher o cilindro 1 de volume $V_1 = \pi r^2h_1$ foram necessários 30 minutos. Logo, para encher o cilindro de $V = \frac{\pi r^2h_1}{3}$ são necessários 10 minutos.

Portanto, para encher a fonte serão necessários 40 minutos.

Questão 04 – Letra A

Eixo cognitivo: IV

Competência de área: 2

Habilidade: 9

Comentário: Como a distância entre duas graduações consecutivas representa sempre o mesmo volume, então as áreas dos segmentos circulares determinados por essas graduações nas bases do cilindro são iguais.

Assim, as graduações consecutivas diminuem conforme temos segmentos circulares mais próximos do centro da base do cilindro.

Questão 05 – Letra B

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 2

Habilidade: 8

Comentário: Calculando os raios dos cilindros do tipo I e do tipo II, temos que:

$$C_I = 2\pi r_I \Rightarrow 20 = 2\pi r_I \Rightarrow \frac{10}{\pi} = r_I \text{ e}$$

$$C_{II} = 2\pi r_{II} \Rightarrow 10 = 2\pi r_{II} \Rightarrow \frac{5}{\pi} = r_{II}$$

Sendo V_I e V_{II} os volumes dos cilindros do tipo I e do tipo II, respectivamente, temos que:

$$V_I = \pi r_I^2.h_I \Rightarrow V_I = \pi.\left(\frac{10}{\pi}\right)^2.10 \Rightarrow V_I = \frac{1\,000}{\pi} \text{ cm}^3 \text{ e}$$

$$V_{II} = \pi r_{II}^2.h_{II} \Rightarrow V_{II} = \pi.\left(\frac{5}{\pi}\right)^2.20 \Rightarrow V_{II} = \frac{500}{\pi} \text{ cm}^3$$

O custo das velas do tipo I e do tipo II são diretamente proporcionais aos volumes. Assim:

$$\frac{V_I}{V_{II}} = \frac{\frac{1\,000}{\pi^2}}{\frac{500}{\pi^2}} = 2 \Rightarrow V_I = 2V_{II}$$

Como $V_I = 2V_{II}$, então o custo de produção de velas do tipo I é o dobro do custo de produção de velas do tipo II.

Questão 06 – Letra E

Eixo cognitivo: IV

Competência de área: 2

Habilidade: 9

Comentário: A área da maior fatia possível é a diferença entre a área da circunferência de raio 3 cm e a área do furo de raio 1 cm, ou seja:

$$A = \pi(3)^2 - \pi(1)^2 = 8\pi$$

Portanto, a área da fatia é oito vezes a área da secção transversal do cilindro.

Questão 07 – Letra A

Eixo cognitivo: II

Competência de área: 2

Habilidade: 7

Comentário: Seja V_c o volume, em cm³, de café que será colocado no copinho de plástico. Logo:

$$V_C = \frac{1}{2}\pi r^2 h \qquad V_C = \frac{1}{2}\pi.(2)^2.4 \qquad V_C = 8\pi$$

Seja V_L o volume, em cm³, da leiteira. Logo:

$$V_L = \pi R^2 H \qquad V_L = \pi.(4)^2.20 \qquad V_L = 320\pi$$

Como a diarista precisa preencher 20 copinhos de plástico, temos que ela precisa fazer $20.8\pi = 160$ cm³ de café, que representa a metade da leiteira.

Questão 08 – Letra D

Eixo cognitivo: IV

Competência de área: 2

Habilidade: 9

Comentário: Sejam A_I e V_I a área lateral e o volume do cilindro I, respectivamente. Portanto, temos:

$$A_I = 2\pi r_I h_I \Rightarrow A_I = 2.\pi.2.6 \Rightarrow A_I = 24\pi \text{ e}$$

$$V_I = \pi r_I^2 h_I \Rightarrow V_I = \pi.(2)^2.6 \Rightarrow V_I = 24\pi$$

Analogamente, sejam A_{II} e V_{II} para o cilindro II e A_{III} e V_{III} para o cilindro III. Logo:

$$A_{II} = 2\pi r_{II} h_{II} \Rightarrow A_{II} = 2.\pi.2.8 \Rightarrow A_{II} = 32\pi \text{ e}$$

$$V_{II} = \pi r_{II}^2 h_{II} \Rightarrow V_{II} = \pi.(2)^2.8 \Rightarrow V_{II} = 32\pi$$

$$A_{III} = 2\pi r_{III} h_{III} \Rightarrow A_{III} = 2.\pi.3.8 \Rightarrow A_{III} = 48\pi \text{ e}$$

$$V_{III} = \pi r_{III}^2 h_{III} \Rightarrow V_{III} = \pi.(3)^2.8 \Rightarrow V_{III} = 72\pi$$

Portanto, a relação área/capacidade dos cilindros I e II é igual a I, enquanto para o cilindro III temos uma relação $\frac{48\pi}{72\pi} = \frac{2}{3}$, ou seja, este tem menor custo de capacidade de armazenamento.

Questão 09 – Letra C

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 2

Habilidade: 8

Comentário: O volume do copo em que será colocada a mistura é:

$$V_{copo} = \pi.2^2.10 \quad 3.4.10 = 120 \text{ cm}^3 = 120 \text{ mL}$$

Sejam **x** e **y** os volumes de açúcar e de água, em mL, respectivamente, que compõem a mistura. Sabe-se que, para fazer a mistura, deve-se usar uma parte de açúcar para cada cinco partes de água. Logo, considerando que não houve redução de volume ao se dissolver o açúcar na água, temos:

$$\begin{cases} x + y = 120 \\ \frac{x}{y} = \frac{1}{5} \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 120 \\ 5x = y \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 20 \\ y = 100 \end{cases}$$

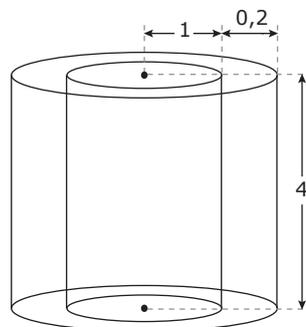
Portanto, a quantidade de água que deve ser utilizada na mistura é cerca de 100 mL.

Questão 10 – Letra D

Eixo cognitivo: II

Competência de área: 2

Habilidade: 7

Comentário: O volume de concreto pode ser calculado pela diferença entre o volume do cilindro externo e o cilindro interno.

Temos:

$$V = \pi.(R^2 - r^2).h = \pi.(1,2^2 - 1^2).4 = 3,1.0,44.4 = 5,456 \text{ m}^3$$

Se cada metro cúbico custa 10 reais, temos que o preço da manilha, em reais, é 5,456.10 = 54,56.

MÓDULO – B 10

Cones

Exercícios de Fixação

Questão 01 – Letra A

Comentário: Temos que $V_{cilindro} = V_{cone}$ e o raio da base do cone é o dobro do raio da base do cilindro, logo:

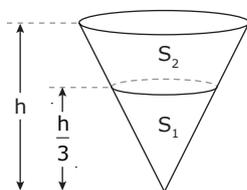
$$V_{cilindro} = V_{cone}$$

$$\pi.R^2.h_{cilindro} = \frac{1}{3}.\pi.(2R)^2.h_{cone}$$

$$R^2.h_{cilindro} = \frac{4R^2}{3}.h_{cone}$$

$$h_{cone} = \frac{3}{4}h_{cilindro}$$

Questão 02 – Letra C

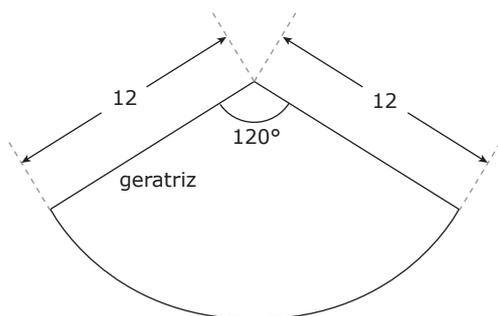
Comentário: Considere a figura a seguir:

Sejam **V**, V_1 e V_2 os volumes do cone grande, do cone pequeno e do tronco do cone, respectivamente.

Logo, $V = V_1 + V_2$.

Assim, temos: $\frac{V_1}{V} = \left(\frac{\frac{h}{3}}{h}\right)^3 \quad \frac{V_1}{V_1 + V_2} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \quad \frac{V_1}{V_1 + V_2} = \frac{1}{27}$

$$27V_1 = V_1 + V_2 \Rightarrow 26V_1 = V_2 \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = 26$$

Questão 03 – Letra D

Comentário: Observe a figura a seguir:

A área do setor circular corresponde à área lateral do cone cujo raio da base é igual a **R**. Logo:

$$A_{lateral\ cone} = A_{setor} \quad \pi.R.\underbrace{g}_{geratriz} = \pi.12^2.\frac{120°}{360°}$$

$$\pi.R.12 \quad \pi.144.\frac{1}{3} \quad R = \frac{144}{3.12} \quad R = 4\text{ cm}$$

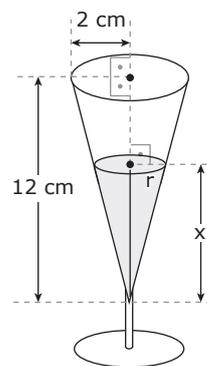
Sendo o raio do cone igual a 4 cm, temos que sua área da base é igual a:

$$A_{base} = \pi.4^2 \Rightarrow A_{base} = 16\pi\text{ cm}$$

Questão 04

Comentário:

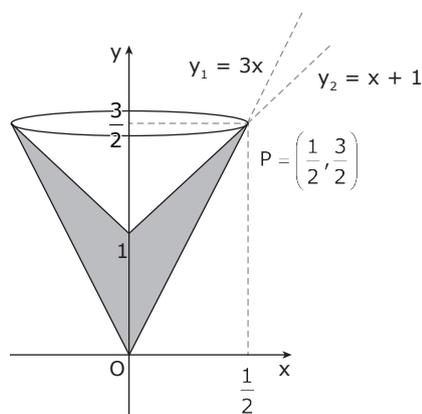
A) Sendo a altura da taça igual a 12 cm e seu raio igual a 2 cm, temos o volume de líquido, quando ela está completamente cheia, igual a $V = \frac{1}{3}.\pi.2^2.12 \quad V = 16\pi\text{ cm}^3$.

B) À medida que o nível de líquido na taça varia em função de **x**, o raio correspondente à superfície do líquido também varia. Logo, devemos expressar o valor do raio em função de **x**, assim utilizando semelhança entre os cones temos:

$$\frac{2}{r} = \frac{12}{x} \quad 12r = 2x \quad r = \frac{x}{6}\text{ cm}$$

A expressão para o volume V de líquido nessa taça será

$$V(x) = \frac{1}{3}.\left(\frac{x}{6}\right)^2.x = \frac{x^3\pi}{108}\text{ cm}^3$$

Questão 05 – Letra B

Comentário: Considere a figura a seguir:

$$y_1 = y_2 \quad 3x = x + 1 \quad x = \frac{1}{2} \quad y = \frac{3}{2}$$

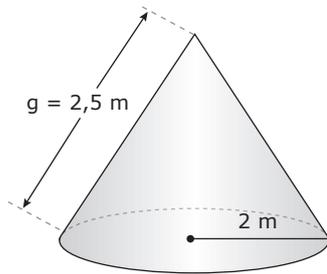
O sólido **S** formado possui volume igual ao volume do cone maior, de raio $\frac{1}{2}$ e altura $\frac{3}{2}$, menos o volume do cone menor, de raio $\frac{1}{2}$ e altura $\frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$. Portanto, seu volume é igual a:

$$V_S = \underbrace{\frac{1}{3}.\pi.\left(\frac{1}{2}\right)^2.\frac{3}{2}}_{\text{Volume do cone maior}} - \underbrace{\frac{1}{3}.\pi.\left(\frac{1}{2}\right)^2.\frac{1}{2}}_{\text{Volume do cone menor}}$$

$$V_S = \frac{1}{3}.\pi.\left(\frac{1}{2}\right)^2.\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right) \quad V_S = \frac{\pi}{12}$$

Exercícios Propostos

Questão 02 – Letra E

Comentário: Para o cálculo da área externa da cisterna, podemos dividi-la em um cilindro e em um cone cujos raios medem 2 m, logo:

$A_{\text{lateral cone}} = \pi.R.g \Rightarrow A_{\text{lateral cone}} = \pi.2.2,5 = 5\pi\ m^2$

Calculando a área lateral e a área da base do cilindro, temos:

$A_\ell = 2.\pi.2.2 \Rightarrow A_\ell = 8\pi\ m^2$

$A_b = \pi.2^2 \Rightarrow A_b = 4\pi\ m^2$

Considerando $\pi = 3,14$, temos que a área total da cisterna será:

$A_{\text{total}} = A_{\text{lateral cone}} + A_\ell + A_b \Rightarrow$

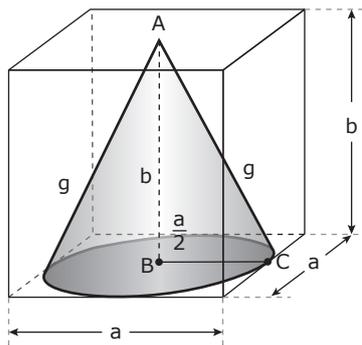
$A_{\text{total}} = 5\pi + 8\pi + 4\pi \Rightarrow$

$A_{\text{total}} = 17.3,14 = 53,38\ m^2$

Como cada m^2 tem um custo de 40 reais. Então, para a construção de 100 cisternas teremos um custo igual a:

53,38.40.100 = 213 520 reais

Questão 05 – Letra D

Comentário: Considere a figura a seguir:

Foi dado que $\frac{b}{a} = \frac{3}{2}$, ou seja, $b = \frac{3}{2}a$.

Como o volume do cone é π temos:

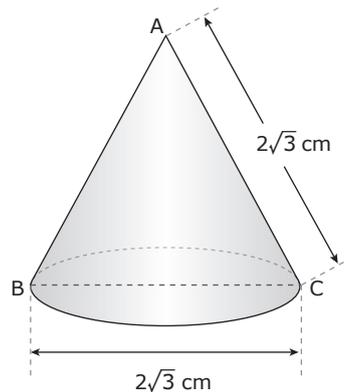
$\pi = \frac{1}{3}\pi\,{\frac{a}{2}}^{2}.b \Rightarrow a = 2$

Logo, b = 3.

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ABC, temos:

$g^2 = b^2 + {\frac{a}{2}}^{2} \Rightarrow g^2 = 3^2 + {\frac{2}{2}}^{2} \Rightarrow g = \sqrt{10}$

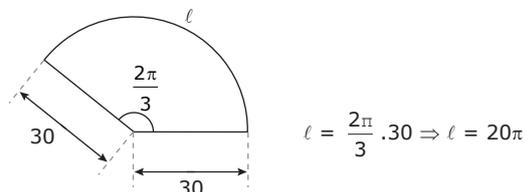
Questão 07

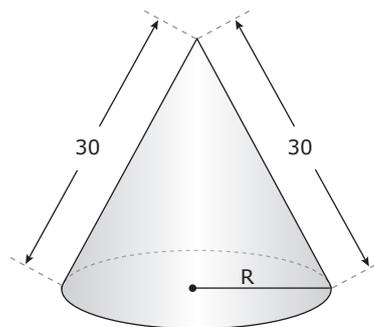
Comentário: Um cone equilátero é um cone cuja secção meridiana é um triângulo equilátero, logo:

Calculando a área da secção meridiana representada pelo triângulo equilátero ABC, temos:

$A = \frac{(2\sqrt{3})^2.\sqrt{3}}{4} \quad A = \frac{12\sqrt{3}}{4} \quad A = 3\sqrt{3}\ cm^2$

Logo, $3\sqrt{3}.\sqrt{3} = 9\ cm^2$.

Questão 09 – Letra D

Comentário: De um setor circular de ângulo $\theta = \frac{2\pi}{3}$ e raio 30 cm, temos que o comprimento do arco é:

$\ell = \frac{2\pi}{3}.30 \Rightarrow \ell = 20\pi$

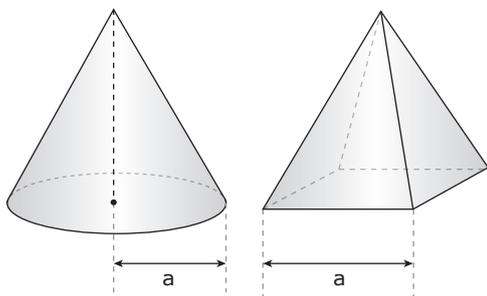
Juntando os lados desse setor circular, temos um cone reto cuja geratriz é o raio do setor, ou seja, g = 30 cm, e o comprimento do arco do setor é o comprimento da base do cone. Assim, temos a seguinte figura:

Sendo **R** o raio, em cm, do cone, temos:

$\ell = C \Rightarrow 20\pi = 2\pi R \Rightarrow R = 10$

Logo, a área da base, em cm^2, do cone é:

$A = \pi R^2 \Rightarrow A = \pi(10)^2 \Rightarrow A = 100\pi$

Questão 12 – Letra D

Comentário: Seja **a** o raio da base de um cone circular reto e a aresta da base quadrangular de uma pirâmide que possuem a mesma altura. Pela geometria da situação temos as seguintes figuras:

O cone e a pirâmide possuem a mesma altura, logo:

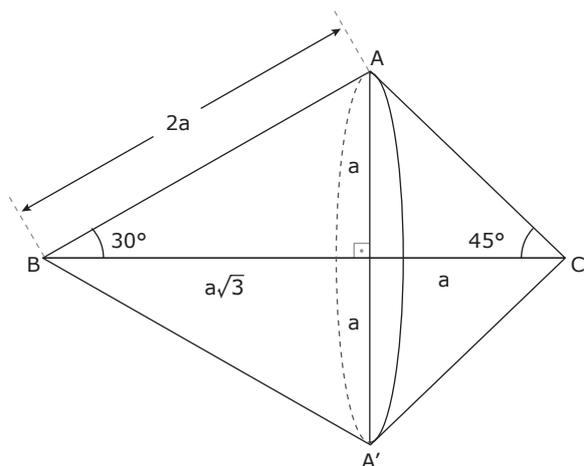
$V_{cone} = \frac{1}{3}.\pi.a^2.4 \qquad V_{cone} = \frac{4\pi a^2}{3}\ cm^2$

$V_{pirâmide} = \frac{1}{3}.a^2.4 \qquad V_{pirâmide} = \frac{4a^2}{3}\ cm^2$

Portanto, a razão entre o volume do cone e o da pirâmide, nessa ordem, é:

$$\frac{V_{cone}}{V_{pirâmide}} = \frac{\frac{4\pi a^2}{3}}{\frac{4a^2}{3}} = \frac{4\pi a^2}{3}.\frac{3}{4a^2} = \pi$$

Questão 14 – Letra B

Comentário: Fazendo a rotação do triângulo ABC em torno do lado BC, obtemos dois cones de mesma base.

$BC = a + a\sqrt{3}$

Como $BC = 6 + 6\sqrt{3}$, então a = 6. Logo, o volume do sólido gerado é a soma dos dois cones, ou seja:

$$V = \frac{1}{3}\pi(6)^2 6\sqrt{3} + \frac{1}{3}\pi(6)^2 6 = 72\pi\left(\sqrt{3}+1\right)cm^3$$

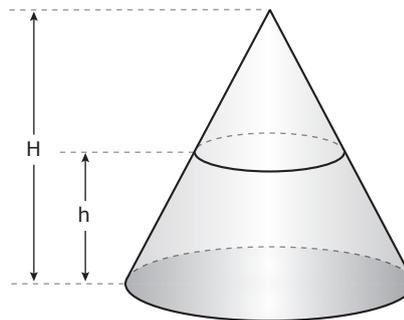
Questão 15 – Letra B

Comentário: Seja **V** a capacidade do reservatório cônico e **H** sua altura. Esse volume atende a uma comunidade durante 81 dias. Para abastecê-la durante 24 dias, precisamos de uma capacidade de

V ------ 81

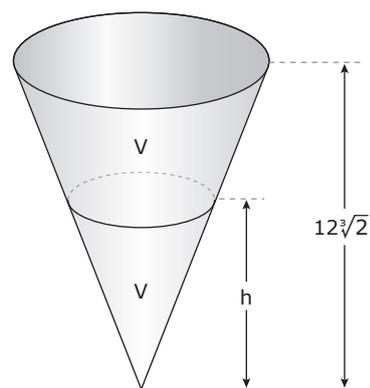
x ------ 24

$x = \frac{8}{27}V$

Como essa capacidade $\frac{8}{27}$ V está a uma altura **h** do nível do reservatório, então considere a figura a seguir:

Como os cones pequeno e grande são semelhantes, temos que:

$$\frac{V}{\frac{8V}{27}} = \left(\frac{H}{h}\right)^3 \qquad \frac{3}{2} = \frac{H}{h} \qquad h = \frac{2}{3}H$$

Questão 16 – Letra A

Comentário: Considere a figura a seguir:

Foi dado que o volume do cone pequeno e o volume do tronco do cone são iguais.

Como os cones pequeno e grande são semelhantes, temos:

$$\frac{V}{2V} = \left(\frac{h}{12\sqrt[3]{2}}\right)^3 \Rightarrow h = 12$$

Seção Enem

Questão 01 – Letra D

Eixo cognitivo: II

Competência de área: 2

Habilidade: 7

Comentário: Girando 360º cada figura plana em torno da haste indicada:

- para a figura 1, temos o sólido **D**.
- para a figura 2, temos o sólido **E**.
- para a figura 3, temos o sólido **A**.
- para a figura 4, temos o sólido **B**.
- para a figura 5, temos o sólido **C**.

Questão 02 – Letra B

Eixo cognitivo: II

Competência de área: 2

Habilidade: 7

Comentário: O volume de álcool contido na figura 1 é igual ao da figura 2. Assim, vamos calcular, inicialmente, o volume de álcool contido no cone.

$V_{co} = \frac{1}{3}\pi r^2 h \quad V_{co} = \frac{1}{3}\pi.(5)^2.6 \quad V_{co} = 50\pi \text{ cm}^3$

Então, irão sobrar 575π cm³ de álcool no cilindro. Sendo $V_{ci} = \pi r^2 h$ o volume do cilindro, temos:

$575\pi = \pi r^2 h \Rightarrow 575\pi = \pi(5)^2 h = 23$ cm

Portanto, o vasilhame, que possui 30 cm, possui 23 cm de álcool. Logo, a distância **H** vale:

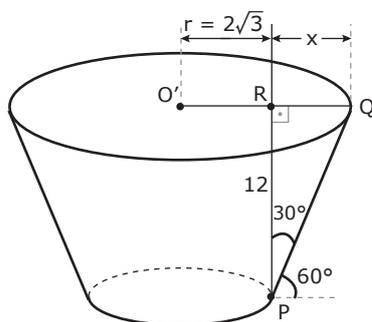
30 – 23 = 7 cm

Questão 03 – Letra B

Eixo cognitivo: II

Competência de área: 2

Habilidade: 7

Comentário: Considere a figura a seguir:

Note que, para calcular o tamanho da tampa, precisamos determinar, inicialmente, o valor de **x**. No triângulo PQR, temos:

$\text{tg } 30° = \frac{x}{12} \quad x = 4\sqrt{3} \text{ m}$

Então, a área da tampa corresponde à área de um círculo de raio $2\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$ m. Logo:

$A = \pi r^2 \Rightarrow A = \pi(6\sqrt{3})^2 \Rightarrow A = 108\pi \text{ m}^2$

Questão 04 – Letra E

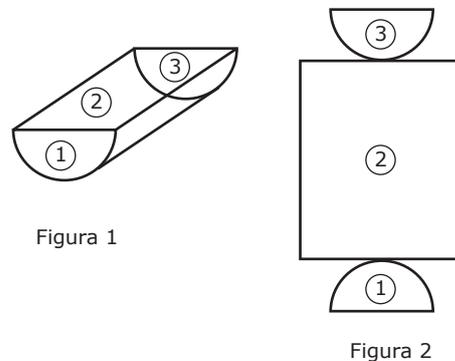
Eixo cognitivo: III

Competência de área: 2

Habilidade: 8

Comentário: Formada por dois semicírculos e um retângulo, a planificação do bebedouro (figura I) pode ser representada da seguinte forma (figura II):

Figura 1

Figura 2

Questão 05 – Letra B

Eixo cognitivo: IV

Competência de área: 2

Habilidade: 9

Comentário: Se os volumes do semi-hemisfério e do cone devem ser iguais, então:

$V_{SH} = V_C \quad \frac{1}{2}.\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{3}\pi R^2 h$

Como os raios são iguais, temos:

2R = h

Como R = 3, temos h = 6 cm.

MÓDULO – C 09

Função exponencial

Exercícios de Fixação

Questão 01 – Letra A

Comentário: Temos que $2^a = c$ e $2^b = d$.

$2^{\frac{a+b}{2}} = 2^{\frac{a}{2}}.2^{\frac{b}{2}} = (2^a)^{\frac{1}{2}}.(2^b)^{\frac{1}{2}} = c^{\frac{1}{2}}.d^{\frac{1}{2}} = (cd)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{cd}$

Questão 02 – Letra B

Comentário: Seja **N** a função definida por $N(t) = 100.2^{3t}$, em que N(t) é o número de microrganismos **t** horas após o início do experimento.

Portanto, o tempo necessário para que a população de 100 microrganismos passe a ser de 3 200 indivíduos é tal que

$3\,200 = 100.2^{3t} \quad 2^{3t} = 2^5 \quad t = \frac{5}{3}$ h, ou seja, 1 h 40 min.

Questão 03 – Letra C

Comentário: A área do trapézio ABCD é dada por:

$\frac{f(2) + f(1)}{2} \; (2 - 1) = \frac{2^2 + 2^1}{2} = \frac{6}{2} = 3$ u.a.

Questão 04 – Letra B

Comentário:

$$f(t) = K.\ \frac{1}{2}^{\frac{t}{2}}$$

Fazendo f(t) = 2 e K = 128, temos:

$$2 = 128.\ \frac{1}{2}^{\frac{t}{2}} \Rightarrow 2 = 2^7.\,2^{-\frac{t}{2}} \Rightarrow 2^{-6} = 2^{-\frac{t}{2}} \Rightarrow$$

$$-\frac{t}{2} = -6 \Rightarrow t = 12 \text{ horas}$$

Questão 05 – Letra C

Comentário: $P(t) = \alpha.4^{\lambda t}$

Para t = 0, temos $P(0) = \alpha.4^0 = \alpha$.

Para t = 4, temos $P(4) = \alpha.4^{4\lambda} = 3\alpha \Rightarrow 4^{4\lambda} = 3$.

Para t = 8, temos $P(8) = \alpha.4^{8\lambda} = \alpha(4^{4\lambda})^2 = \alpha.3^2 = 9\alpha$.

Exercícios Propostos

Questão 01 – Letra E

Comentário:

$f(x) = 2^{2x+1}$

$f(a) = 4f(b) \Rightarrow 2^{2a+1} = 4.2^{2b+1} \Rightarrow 2^{2a+1} = 2^2.2^{2b+1} \Rightarrow$

$2^{2a+1} = 2^{2b+3} \Rightarrow 2a + 1 = 2b + 3 \Rightarrow$

$2a - 2b = 2 \Rightarrow a - b = 1$

Questão 02 – Letra E

Comentário:

$P(t) = 10^a.4^{3t}$

Mas $P(t) = 2.10^a$. Logo:

$2.10^a = 10^a.4^{3t} \Rightarrow 2 = 2^{6t} \Rightarrow 6t = 1 \Rightarrow t = \frac{1}{6}\ h = 10 \text{ min}$

Questão 05 – Letra C

Comentário:

$f(x) = a^x$

$f(1) = a^1 = 3 \Rightarrow a = 3$

$f(x) = 3^x$

Expressão de g(x):

$$g(x) = \begin{matrix} 4, \text{ para } x < 0 \\ mx + n, \text{ para } x \geq 0 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} g(0) = 4 \\ g(1) = m.1 + 4 = 3 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} n = 4 \\ m = -1 \end{matrix} \qquad g(x) = -x + 4 \text{ (para } x \geq 0)$$

$g(g(-1)) = g(4) = 0$

$f(g(3)) = f(1) = 3$

$g(g(-1)) + f(g(3)) = 0 + 3 = 3$

Questão 06 – Letra D

Comentário:

Do gráfico, temos:

$2^b = 2.2^a \Rightarrow 2^b = 2^{1+a} \Rightarrow b = 1 + a$

$2^c = \frac{2^a}{4} \Rightarrow 2^c = 2^{a-2} \Rightarrow c = a - 2$

Questão 08 – Letra E

Comentário:

$y = y_0.2^{-0,5t}$

$\frac{y_0}{4} = y_0.2^{-0,5t} \Rightarrow 2^{-2} = 2^{-0,5t} \Rightarrow -2 = -0,5t \Rightarrow t = 4$ horas

Questão 09 – Letra E

Comentário:

$f(x) = 2^{-3x^2+6x}$

Seja $g(x) = -3x^2 + 6x$. Vamos estudar o seu valor máximo.

$\Delta = 6^2 = 36$

$$y_v = -\frac{}{4a} = -\frac{36}{4(-3)} = 3$$

Logo, o expoente máximo de 2 na função $f(x) = 2^{-3x^2+6x}$ é igual a 3. Portanto, o valor máximo de f(x) é igual a 8.

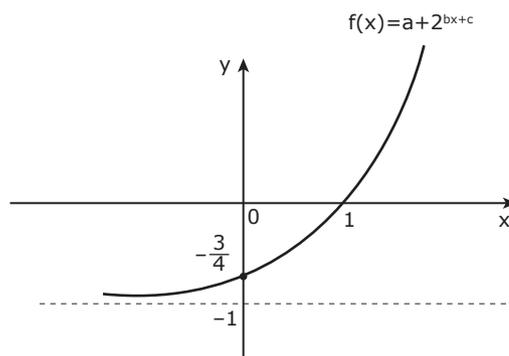
Além disso, f(x) possui imagem positiva. Portanto, sua imagem é dada por]0, 8].

Questão 10 – Letra B

Comentário: De acordo com as informações, temos:

$$N(10) = \frac{N_0}{4} \quad \frac{N_0}{4} = N_0.2^{k.10} \quad 2^{10k} = 2^{-2} \quad k = -5^{-1}$$

Questão 14 – Letra A

Comentário: De acordo com os dados do problema, temos o seguinte gráfico:

Como a imagem inicia-se em −1, concluímos que a = −1;

Logo, $f(x) = -1 + 2^{bx+c}$.

Como f(1) = 0, temos:

$0 = -1 + 2^{b.1+c} \Rightarrow 2^{b+c} = 2^0 \Rightarrow b + c = 0$

Como $f(0) = -\frac{3}{4}$, temos:

$$-\frac{3}{4} = -1 + 2^c \quad 2^c = \frac{1}{4} \quad c = -2 \text{ e } b = 2$$

Logo, a.b.c = −1.2.(−2) = 4.

Questão 16

Comentário:

A) $f(t) = a.2^{-b.t}$

$f(0) = a.2^{-b.0} = 1\ 024 \Rightarrow a = 1\ 024$

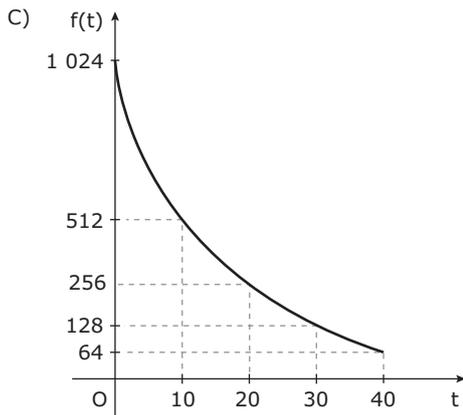
Reescrevendo a função, temos: $f(t) = 1\ 024.2^{-b.t}$

$f(10) = 1\ 024.2^{-10b} = 512 \Rightarrow 2^{10}.2^{-10b} = 2^9 \Rightarrow$

$2^{-10b} = 2^{-1} \Rightarrow -10b = -1 \Rightarrow b = \frac{1}{10}$

B) $f(t) = 1\ 024.\,2^{-\frac{t}{10}} = \frac{1\ 024}{8} \Rightarrow 2^{-\frac{t}{10}} = \frac{1}{8} \Rightarrow$

$2^{-\frac{t}{10}} = 2^{-3} \Rightarrow -\frac{t}{10} = -3 \Rightarrow t = 30$ anos

C)

$f(40) = 1\ 024.\,2^{-\frac{40}{10}} = 1\ 024.2^{-4} = \frac{1\ 024}{16} = 64$

Seção Enem

Questão 01 – Letra E

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 6

Habilidade: 25

Comentário:

$y = 363.e^{0,03.x}$

Em 2030, temos x = 30.

$y = 363.e^{0,03.30} = 363.e^{0,9} = 363.(e^{0,3})^3$

Porém, $e^{0,3} = 1,35$. Logo, temos:

$y = 363.1,35^3 = 363.2,46 \cong 893,11$ milhões

Questão 02 – Letra C

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 5

Habilidade: 21

Comentário: O rendimento **V** por are é dado por:

$V(t) = 6,7.\,e^{\frac{-48,1}{t}} \Rightarrow V(100) = 6,7.\,e^{\frac{-48,1}{100}} = 6,7.e^{-0,481}$

Mas $e^{-0,481} = 0,62$.

Logo, temos V = 6,7.0,62 = 4,154 metros cúbicos por are.

Sabe-se que um hectare corresponde a 100 ares. Portanto, o rendimento total da floresta é igual a:

80.100.4,154 = 33 232 metros cúbicos

Questão 03 – Letra E

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 5

Habilidade: 21

Comentário: O número de bactérias de uma cultura é dado por $N(t) = N_0.\,2^{\frac{t}{12}}$, em que o tempo **t** é medido em horas. Assim, após 6 dias, ou seja, 144 horas, o número inicial de bactérias terá sido multiplicado por:

$N(144) = N_0.\,2^{\frac{144}{12}} = N_0.2^{12} = 4\ 096.N_0$

Questão 04 – Letra A

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 5

Habilidade: 21

Comentário: Montando a equação resultante dos dados do problema, temos:

$600 = 760 \cdot e^{-0,0002.h}$

Tomando o logaritmo neperiano de ambos os lados da equação e aplicando a propriedade segundo a qual log (a.b) = log a + log b, resulta:

$\ln 600 = \ln 760 + \ln e^{-0,0002.h} \Rightarrow 6,40 = 6,63 - 0,0002.h \Rightarrow$

$0,0002.h = 0,23 \Rightarrow h = 1\ 150$ m

MÓDULO – C 10

Equações e inequações exponenciais

Exercícios de Fixação

Questão 01 – Letra A

Comentário: Igualando as funções, temos:

$h(x) = s(x) \quad 2^x + 1 = 2^{x+1} \quad 2^x + 1 = 2^x.2$

$2.2^x - 2^x = 1 \quad x = 0 \text{ e } y = h(0) = 2^0 + 1 = 2$

Logo, a intersecção das funções é o ponto (0, 2).

A soma de suas coordenadas é 2 e este ponto pertence à reta y = x + 2.

Questão 02 – Letra C

Comentário: Determinando $m_0 = ca^{-k.0} \Rightarrow m_0 = c$.

Como, em 10 anos, m_0 foi reduzido para $0,2.m_0$, temos:

$0,2.m_0 = m_0.a^{-10k} \Rightarrow a^{-10k} = 0,2$

Em 20 anos, $m(20) = m_0.a^{-20.k} = m_0.(a^{-10k})^2 = m_0.(0,2)^2 = 0,04.m_0$, o que corresponde a 4% de m_0.

Questão 03 – Letra D

Comentário: $\begin{array}{l} 4^{x+y} = 32 \\ 3^{y-x} = \sqrt{3} \end{array}$

i) Da primeira equação, temos:

$4^{x+y} = 32 \Rightarrow 2^{2x+2y} = 2^5 \Rightarrow 2x + 2y = 5$ (I)

ii) Da segunda equação, temos:

$3^{y-x} = \sqrt{3} \Rightarrow 3^{y-x} = 3^{\frac{1}{2}} \Rightarrow y - x = \frac{1}{2} \Rightarrow -2x + 2y = 1$ (II)

Resolvendo o sistema $\begin{array}{l} 2x + 2y = 5 \\ -2x + 2y = 1 \end{array}$, temos que $x = 1$ e $y = \frac{3}{2}$.

Portanto, $1, \frac{3}{2}$.

Questão 04 – Letra A

Comentário: Devemos considerar duas possibilidades:

i) Primeira possibilidade: $0 < x < 1$

Nesse caso, devemos inverter o sinal da desigualdade para os expoentes. Temos $2x \leq x + 3 \Rightarrow x \leq 3$.

Efetuando a interseção dos intervalos anteriores, obtemos $0 < x < 1$ (I).

ii) Segunda possibilidade: $x > 1$

Nesse caso, devemos conservar o sinal da desigualdade para os expoentes. Temos $2x \geq x + 3 \Rightarrow x \geq 3$.

Efetuando a interseção dos intervalos anteriores, obtemos $x \geq 3$ (II).

Logo, efetuando a união dos intervalos (I) e (II), obtemos $]0, 1[\cup [3, +\infty[$.

Questão 05 – Letra C

Comentário: $c(t) = 200.3^{kt}$

$k = \frac{1}{12} \Rightarrow c(t) = 200.3^{\frac{t}{12}} \Rightarrow 1\,800 = 200.3^{\frac{t}{12}} \Rightarrow$

$9 = 3^{\frac{t}{12}} \Rightarrow 3^2 = 3^{\frac{t}{12}} \Rightarrow \frac{t}{12} = 2 \Rightarrow t = 24$

Exercícios Propostos

Questão 01 – Letra D

Comentário:

$a = x^2$

$3^a.3^{7x}.3^{12} = 1 \Rightarrow 3^{a+7x+12} = 3^0 \Rightarrow 3^{x^2+7x+12} = 3^0$

$x^2 + 7x + 12 = 0 \Rightarrow x_1 = -4$ ou $x_2 = -3$

$x_2 - x_1 = -3 - (-4) = 1$

Questão 03 – Letra B

Comentário: Sejam R_0, PIB_0 e P_0, respectivamente, a renda per capita, o PIB e a população do país hoje. Assim, daqui a 20 anos, o PIB será $(1 + i)^{20}.PIB_0$ e a população $(1,02)^{20}.P_0$, em que **i** é a taxa pedida.

Assim:

$R = 2.R_0 \quad \frac{(1+i)^{20}.PIB_0}{(1,02)^{20}.P_0} = 2.\frac{PIB_0}{P_0} \quad (1+i)^{20} = 2.(1,02)^{20}$

$i = \sqrt[20]{2.(1,02)^{20}} - 1 \quad i = 1,02.\sqrt[20]{2} - 1 \quad i \quad 1,02.1,035 - 1$

$i \quad 5,6\%$

Questão 04 – Letra E

Comentário:

$4^x - 15.2^x - 16 = 0$

Fazendo $2^x = L$, temos:

$L^2 - 15L - 16 = 0 \Rightarrow L_1 = -1$ ou $L_2 = 16$

Para $L_1 = -1$, temos $2^x = -1$. (não convém)

Para $L_2 = 16$, temos $2^x = 16 \Rightarrow 2^x = 2^4 \Rightarrow x = 4$. (convém)

Questão 05 – Letra A

Comentário:

$3^{4x-1} + 9^x = 6 \quad \frac{3^{4x}}{3} + 3^{2x} = 6 \quad 3^{4x} + 3.3^{2x} = 18$

Consideremos $3^{2x} = y$.

$y^2 + 3y - 18 = 0 \quad y = \frac{-3 \pm \sqrt{9+72}}{2} \quad y = 3$ ou $y = -6$

Para $y = 3$, $x = \frac{1}{2}$; para $y = -6$, não convém.

Portanto, $x^x = \frac{1}{2}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Questão 06 – Letra D

Comentário:

$P = 64\,000.(1 - 2^{-0,1t})$

$64\,000.(1 - 2^{-0,1t}) > 63\,000 \Rightarrow$

$1 - 2^{-0,1t} > \frac{63}{64} \Rightarrow -2^{-0,1t} > \frac{63}{64} - 1 \Rightarrow -2^{-0,1t} > -\frac{1}{64} \Rightarrow$

$2^{-0,1t} < \frac{1}{64} \Rightarrow 2^{-0,1t} < 2^{-6} \Rightarrow -0,1t < -6 \Rightarrow$

$0,1t > 6 \Rightarrow t > 60$

Questão 08 – Letra E

Comentário:

$3^x.27^y = 9 \quad 3^{x+3y} = 3^2$

$y^3 + \frac{2}{3}xy^2 = 0 \quad y^2.\ y + \frac{2}{3}x \ = 0$

$x + 3y = 2$

$y = 0$ ou $y = -\frac{2}{3}x$

$x = 2$ e $y = 0$

ou

$x = -2$ e $y = \frac{4}{3}$

Logo, $-2, \frac{4}{3}$ é um ponto do 2º quadrante e (2, 0) é um ponto do eixo **x**.

Questão 09 – Letra D

Comentário:

$\frac{\sqrt{3}}{9}^{2x-2} = \frac{1}{27} \quad \frac{3^{\frac{1}{2}}}{3^2}^{2x-2} = 3^{-3} \quad \left(3^{-\frac{3}{2}}\right)^{2(x-1)} = 3^{-3}$

$3^{-3x+3} = 3^{-3} \Rightarrow -3x + 3 = -3 \Rightarrow -3x = -6 \Rightarrow x = 2$

Questão 11 – Letra C

Comentário:

$M(t) = C.2^{0,04.t} \Rightarrow M(t) = 4C \Rightarrow 4C = C.2^{0,04.t} \Rightarrow$

$2^2 = 2^{0,04.t} \Rightarrow 2 = 0,04.t \Rightarrow$

$t = 50$ meses, ou seja, 4 anos e 2 meses

Questão 15 – Letra D

Comentário:

$2^{x-1} + 2^{x+1} + 2^x = 7 \Rightarrow \frac{2^x}{2} + 2^x.2 + 2^x = 7 \Rightarrow$

$2^x.\left(\frac{1}{2} + 2 + 1\right) = 7 \Rightarrow 2^x.\frac{7}{2} = 7 \Rightarrow 2^x = 2 \Rightarrow x = 1$

Questão 18 – Letra C

Comentário:

$4^{2x-2} - 24.4^{x-2} + 8 = 0$

Multiplicando os dois membros por 16, temos:

$16.\left(\frac{4^{2x}}{16} - 24.\frac{4^x}{16} + 8\right) = 0 \Rightarrow$

$4^{2x} - 24.4^x + 128 = 0$

Fazendo $4^x = L$, temos:

$L^2 - 24L + 128 = 0 \Rightarrow L_1 = 8$ ou $L_2 = 16$

Para $L_1 = 8$, temos $4^x = 8 \Rightarrow 2^{2x} = 2^3 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x_1 = \frac{3}{2}$.

Para $L_2 = 16$, temos $4^x = 16 \Rightarrow 4^x = 4^2 \Rightarrow x_2 = 2$.

$x_1.x_2 = 2.\frac{3}{2} = 3$

Seção Enem

Questão 01 – Letra C

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 2

Habilidade: 8

Comentário: Sendo a = 1, o valor de **x** para y = 1 na catenária

$y = \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2a}$ pode ser calculado por:

$1 = \frac{e^x + e^{-x}}{2.1} \quad e^x + e^{-x} = 2$

Chamando e^x de **y**, temos:

$e^x + (e^x)^{-1} = 2 \quad y + y^{-1} = 2 \quad y + \frac{1}{y} = 2$

$y^2 - 2y + 1 = 0 \quad (y - 1)^2 = 0 \quad y = 1$

Portanto:

$e^x = y \quad e^x = 1 \quad e^x = e^0 \quad x = 0$

Questão 02 – Letra E

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 5

Habilidade: 21

Comentário: Pelo enunciado, temos que T_a = 5 °C. Além disso, 2 horas após a cerveja ter sido colocada na geladeira, sua temperatura chegou a 14 °C.

Logo:

$T(t) = T_a + B.3^{\frac{-t}{2}} \quad T(2) = 5 + B.3^{\frac{-2}{2}} = 14 \quad B.3^{-1} = 9 \quad B = 27$

Reescrevendo a expressão da temperatura da garrafa:

$T(t) = 5 + 27.3^{\frac{-t}{2}}$

Portanto, para saber o tempo gasto para que essa garrafa atingisse a temperatura de 6 °C, basta fazer T(t) = 6. Assim:

$T(t) = 5 + 27.3^{\frac{-t}{2}} = 6 \quad 27.3^{\frac{-t}{2}} = 1 \quad 3^{\frac{-t}{2}} = \frac{1}{27} \quad 3^{\frac{-t}{2}} = 3^{-3}$

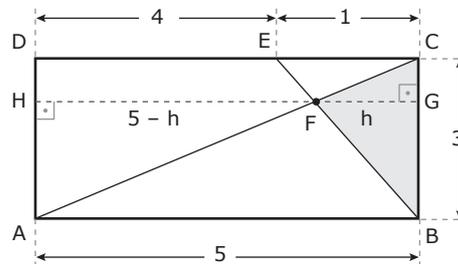
$\frac{-t}{2} = -3 \quad t = 6$ horas

MÓDULO – D 09

Áreas de polígonos

Exercícios de Fixação

Questão 01 – Letra B

Comentário: Considere a figura a seguir:

Da semelhança dos triângulos ABF e CEF, temos:

$\frac{CE}{AB} = \frac{CF}{AF} \quad \frac{1}{5} = \frac{CF}{AF} \quad (I)$

Da semelhança dos triângulos FGC e FHA, temos:

$\frac{h}{5-h} = \frac{CF}{AF} \quad (II)$

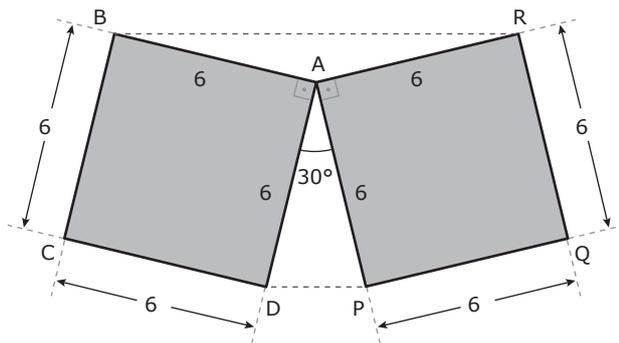
Igualando as equações I e II, temos:

$\frac{h}{5-h} = \frac{1}{5} \Rightarrow h = \frac{5}{6}$

Portanto, a área **A** do triângulo BCF vale:

$A = \frac{BC.h}{2} \quad A = \frac{3.\frac{5}{6}}{2} \quad A = \frac{5}{4}$

Questão 02 – Letra A

Comentário: Considere a figura a seguir:

A área do triângulo ADP vale:

$A_{\Delta ADP} = \frac{1}{2}.6.6.\text{sen } 30° \Rightarrow A_{\Delta ADP} = 9$

A área do triângulo BAR, em que o ângulo $B\hat{A}R$ = 150°, vale:

$A_{\Delta BAR} = \frac{1}{2}.6.6.\text{sen } 150° \Rightarrow A_{\Delta BAR} = 9$

Logo, a área **A** do hexágono BCDPQR vale:

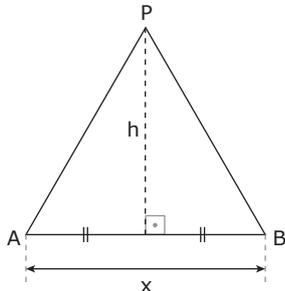
$A = A_{BCDA} + A_{\Delta ADP} + A_{APQR} + A_{\Delta BAR} \Rightarrow$

$A = (6)^2 + 9 + (6)^2 + 9 \Rightarrow A = 90$

Questão 03 – Letra E

Comentário: Sendo **x** a medida dos lados do hexágono regular, temos que sua área é equivalente a seis vezes a área de um triângulo equilátero também de lado **x**, logo:

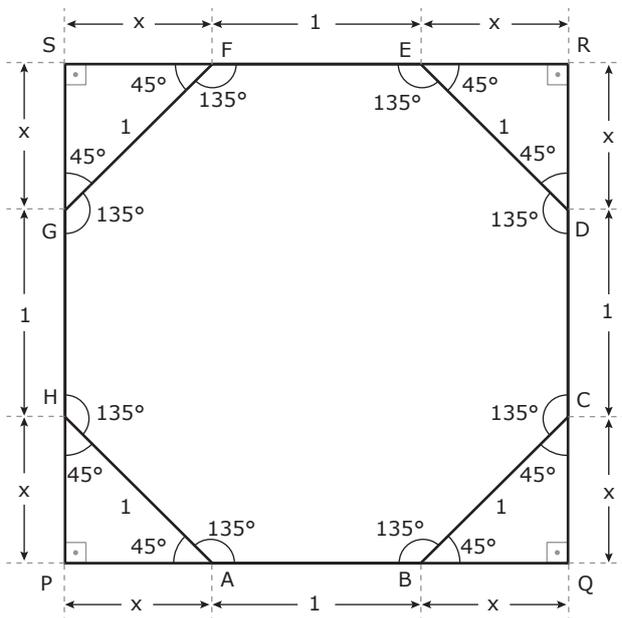
$$A_{hex} = 6.\frac{x^2\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3} \quad x^2 = \frac{4}{6} \quad x = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Observe a figura a seguir:

A distância do ponto **P** ao lado AB equivale a altura **h** do triângulo PAB, como a área do triângulo PAB vale $\sqrt{2}$, temos:

$$\frac{x.h}{2} = \sqrt{2} \quad \frac{\sqrt{6}}{3}.h = 2\sqrt{2} \quad h = \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = 2\sqrt{3}$$

Logo, a distância de **P** ao lado AB é igual a $2\sqrt{3}$.

Questão 04 – Letra C

Comentário: Considere a figura a seguir:

Como os ângulos internos de um octógono regular medem 135°, os ângulos da base dos quatro triângulos retângulos APH, BCQ, DRE, FSG medem 45°, ou seja, esses quatro triângulos retângulos são isósceles.

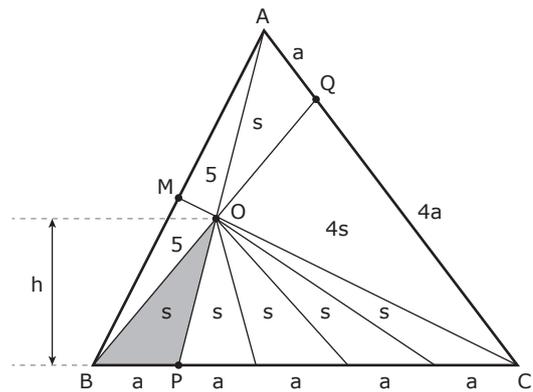
Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo APH, temos:

$$AH^2 = (PH)^2 + (AP)^2 \Rightarrow (1)^2 = x^2 + x^2 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ dm, pois } x > 0$$

Portanto, a área do quadrado, em dm², PQRS vale:

$$A = (1 + 2x)^2 \Rightarrow A = \left(1 + 2.\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Rightarrow A = 3 + 2\sqrt{2}$$

Questão 05 – Letra C

Comentário: Observe a figura a seguir:

O triângulo ABC é isósceles, pois AC = BC, e MC é mediana relativa ao lado AB. Logo, os triângulos ACM e BCM são congruentes pelo caso LLL.

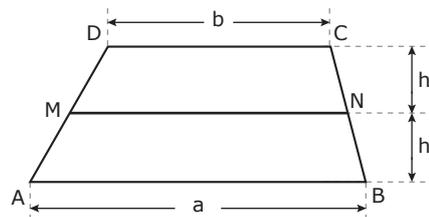
Dividindo o lado PC do triângulo OPC em quatro partes iguais, temos quatro triângulos que possuem a mesma base **a** e a mesma altura **h**, logo, eles possuem a mesma área **S** do triângulo OPB. Dessa maneira, temos que $A_{\Delta APC} = 4_{\Delta ABP}$, pois eles possuem a mesma altura. Porém, a base do triângulo APC é quatro vezes a do ABP, logo:

$$A_{\Delta APC} = 4_{\Delta ABP} \Rightarrow 9S = 4(10 + S) \Rightarrow 9S = 40 + 4S \Rightarrow 5S = 40 \Rightarrow S = 8$$

Portanto, a área do triângulo BOP é igual a 8 cm².

Exercícios Propostos

Questão 02 – Letra C

Comentário: Seja o trapézio ABCD a seguir:

Como os pontos **M** e **N** são os pontos médios dos lados AD e BC, respectivamente, então MN é a base média do trapézio ABCD, ou seja:

$$MN = \frac{AB + CD}{2} \Rightarrow MN = \frac{a + b}{2}$$

A área do trapézio ABNM é:

$$A_{ABNM} = \frac{(AB + MN)h}{2} \Rightarrow A_{ABNM} = \frac{\left(a + \frac{a+b}{2}\right)h}{2} \Rightarrow A_{ABNM} = \frac{(3a + b)h}{4}$$

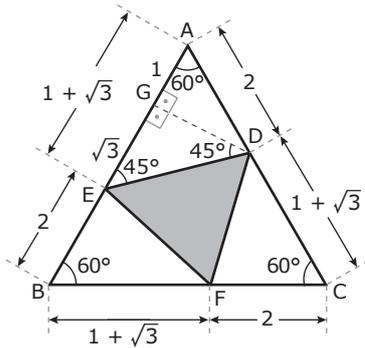
A área do trapézio MNCD é:

$$A_{MNCD} = \frac{(MN + CD)h}{2} \Rightarrow A_{MNCD} = \frac{\left(\frac{a+b}{2} + b\right)h}{2} \Rightarrow A_{MNCD} = \frac{(a+3b)h}{4}$$

Logo, a razão entre as áreas dos trapézios MNCD e ABNM é igual a:

$$\frac{A_{MNCD}}{A_{ABNM}} = \frac{\left(\frac{a+3b}{4}\right)h}{\left(\frac{3a+b}{4}\right)h} = \frac{a+3b}{3a+b}$$

Questão 04

Comentário: Considere a figura a seguir:

Como os lados do triângulo ABC são iguais, então trata-se de um triângulo equilátero.

Trace a altura DG. Assim, do triângulo ADG, temos:

$$\text{sen } 60^\circ = \frac{DG}{2} \Rightarrow DG = \sqrt{3} \qquad \cos 60^\circ = \frac{AG}{2} \Rightarrow AG = 1$$

Logo, EG = $\sqrt{3}$.

O triângulo retângulo EGD é isósceles de base ED, ou seja, $G\hat{D}E = G\hat{E}D = 45^\circ$. Assim, $A\hat{E}D = 45^\circ$.

A área do triângulo DEF, em cm², é a diferença entre a área do triângulo ABC e as áreas dos triângulos ADE, DCF e BFE, que são iguais.

$$A_{\Delta DEF} = A_{\Delta ABC} - (A_{\Delta ADE} - A_{\Delta DCF} - A_{\Delta BFE}) \Rightarrow$$

$$A_{\Delta DEF} = \frac{(3+\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4} - 3\,\frac{1}{2}(1+\sqrt{3})2.\text{sen } 60^\circ \Rightarrow$$

$$A_{\Delta DEF} = \frac{12\sqrt{3}+18}{4} - \frac{6\sqrt{3}+18}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Questão 08 – Letra A

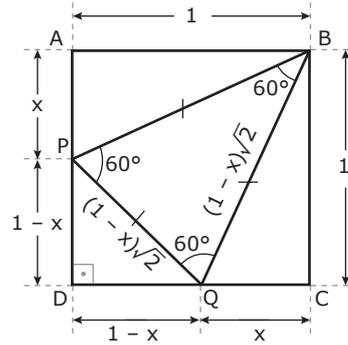
Comentário: Como a área do triângulo T_1 é o triplo da área do triângulo T_2, temos que:

$$A_{T_1} = 3A_{T_2} \qquad \frac{\ell^2}{2}\text{sen }\theta = \frac{3\ell^2}{2}\text{sen } 2\theta \qquad \text{sen }\theta = 3\underbrace{\text{sen } 2\theta}_{\text{sen }(\theta+\theta)}$$

$$\text{sen }\theta = 3\text{sen }(\theta+\theta) \qquad \text{sen }\theta = 3.2\text{sen }\theta.\cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{\text{sen }\theta}{6\text{sen }\theta} \qquad \cos\theta = \frac{1}{6}$$

Questão 09 – Letra C

Comentário: Considere a figura a seguir:

Os triângulos retângulos ABP e CBQ são congruentes pelo caso cateto-hipotenusa. Logo, AP = QC.

Seja AP = QC = x.

Daí, DP = DQ = (1 – x), e PQ = $(1 - x)\sqrt{2}$, pelo Teorema de Pitágoras.

Logo, BQ = PQ = $(1 - x)\sqrt{2}$.

Agora, aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo BCQ, temos:

$BQ^2 = BC^2 + QC^2 \Rightarrow \left((1-x)\sqrt{2}\right)^2 = x^2 + 1^2 \Rightarrow$

$x = 2 - \sqrt{3}$, pois x < 1

Portanto, a área do triângulo BCQ vale:

$$A = \frac{x}{2} = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$$

Questão 10 – Letra B

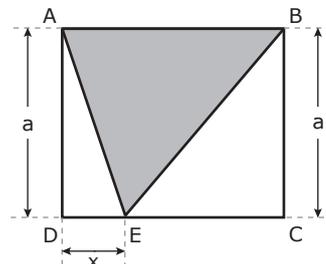
Comentário: As áreas dos triângulos ACB e ACE são iguais, pois eles possuem a mesma base, e, como a reta **r** é paralela ao segmento AC, possuem a mesma altura.

Logo, a área do triângulo BEC é:

$A_{\Delta BEC} = A_{ABED} - A_{\Delta ACB} - A_{\Delta ACD} \Rightarrow$

$A_{\Delta BEC} = 21 - 4 - 10 \Rightarrow A_{\Delta BEC} = 7$

Questão 11 – Letra A

Comentário: Considere a figura a seguir:

Como a área do triângulo ADE corresponde a 20% da área do quadrado ABCD, temos que:

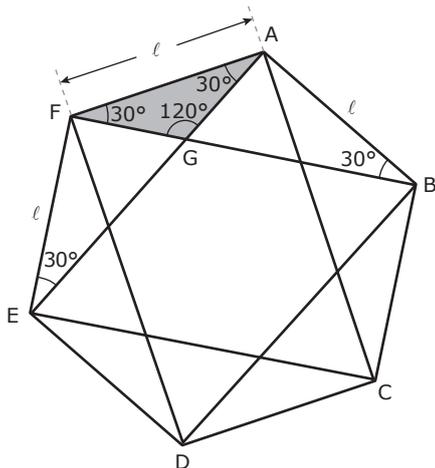
$$A_{\Delta ADE} = \frac{1}{5}.A_{ABCD} \Rightarrow \frac{a.x}{2} = \frac{1}{5}.a^2 \Rightarrow x = \frac{2}{5}a, \text{ pois } a \neq 0$$

Logo, $EC = a - \frac{2}{5}a \Rightarrow EC = \frac{3}{5}a$.

Como a área do triângulo EBC vale 30 cm², então **a**, em cm, vale:

$$\frac{3}{5}a.a.\frac{1}{2} = 30 \Rightarrow a^2 = 100 \Rightarrow a = 10, \text{ pois } a > 0$$

Questão 12 – Letra A

Comentário: Considere o hexágono ABCDEF a seguir:

Como ABCDEF é um hexágono regular, então $A\hat{F}E = 120°$.

Logo, $F\hat{A}E = F\hat{E}A = 30°$ e, analogamente, $A\hat{B}F = A\hat{F}B = 30°$.

Daí, GF = GA e $A\hat{G}F = 120°$.

Como a área do hexágono regular ABCDEF é 180 cm², temos:

$180 = 6.\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \ell^2 = 40\sqrt{3}$

Aplicando a Lei dos Senos no triângulo AGF, temos:

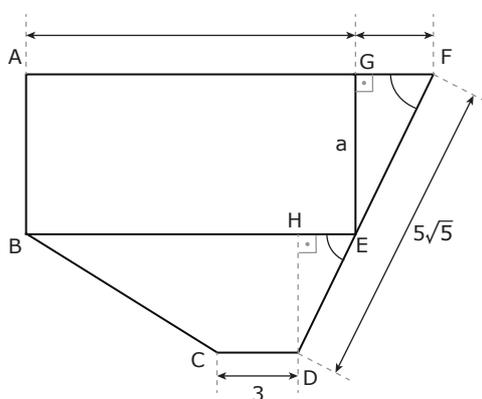
$\frac{AF}{\text{sen }120°} = \frac{GF}{\text{sen }30°}$ $\frac{\ell}{\text{sen }120°} = \frac{GF}{\text{sen }30°}$ $GF = \frac{\ell\sqrt{3}}{3}$

Assim, a área do triângulo AGF, em cm², vale:

$A = \frac{1}{2}.\ell.\frac{\ell\sqrt{3}}{3}.\text{sen }30° \Rightarrow A = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{12} \Rightarrow$

$A = \frac{40\sqrt{3}.\sqrt{3}}{12} \Rightarrow A = 10$

Questão 14 – Letra E

Comentário: Observe a figura a seguir:

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo EFG, temos que:

$EF^2 = 3^2 + 6^2 \Rightarrow EF^2 = 45 \Rightarrow EF = 3\sqrt{5}$

Logo, $ED = DF - EF \Rightarrow ED = 5\sqrt{5} - 3\sqrt{5} \Rightarrow ED = 2\sqrt{5}$.

Pelo caso AA, temos que os triângulos EFE e DEH são semelhantes; podemos, então, determinar a medida DH, que corresponde à altura do trapézio BCDE, assim:

$\frac{DH}{EG} = \frac{ED}{EF}$ $\frac{DH}{6} = \frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{5}}$ $DH = 4$

Dessa forma, temos que a área a ser calculada é igual a:

$A = A_{ABEG} + A_{EFG} + A_{BCDE}$ $A = 12.6 + \frac{3.6}{2} + \frac{(12+3)4}{2}$

$A = 72 + 9 + 30 = 111 \text{ cm}^2$

Na escala apresentada, temos que

1 cm (desenho) = 200 000 cm (real), logo,

1 cm² (desenho) = 200 000² cm² (real), assim:

$111.(4.10^{10})$ cm² = 444 km²

Seção Enem

Questão 01 – Letra D

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 3

Habilidade: 12

Comentário: Sejam A_I, A_{II} e A_{III} as áreas dos depósitos I, II e III, respectivamente. Assim:

$A_I + A_{II} + A_{III} + 20 = 11.10 \Rightarrow A_I + A_{II} + A_{III} = 90$

$\frac{A_I}{90} = \frac{A_{II}}{60} = \frac{A_{III}}{120} = \frac{A_I + A_{II} + A_{III}}{270} = \frac{90}{270} = \frac{1}{3}$

Seja **x** a largura, em metros, do depósito III. Logo:

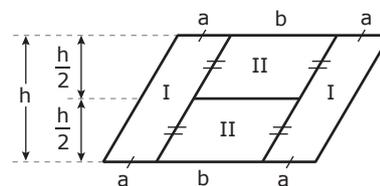
$A_{III} = \frac{120}{3} = 40 \Rightarrow x.10 = 40 \Rightarrow x = 4$

Questão 02 – Letra E

Eixo cognitivo: IV

Competência de área: 3

Habilidade: 13

Comentário: Considere a figura a seguir, a qual representa uma possível divisão do terreno.

A área I vale $A_I = ah$. Já a área II vale $A_{II} = \frac{bh}{2}$.

Como as áreas indicadas por I e por II devem ser iguais, temos que:

$A_I = A_{II} \Rightarrow ah = \frac{bh}{2} \Rightarrow b = 2a$

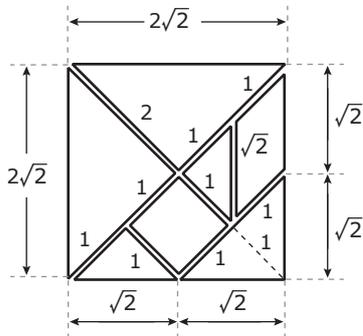
Portanto, b = 2a, mas isso não ocorre necessariamente na alternativa E.

Questão 03 – Letra B

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 3

Habilidade: 12

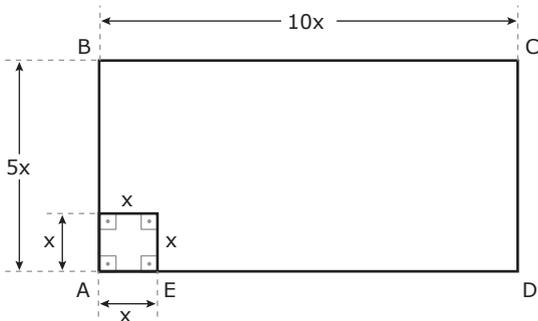
Comentário: Como o lado AB do hexágono mostrado na figura 2 mede 2 cm, teremos a figura 1 com as seguintes medidas, em cm.

Assim, a figura 1 é um quadrado de lado $2\sqrt{2}$ cm.
Logo, sua área, em cm², vale $A_I = (2\sqrt{2})^2 = 8$.
Como as áreas das três figuras são iguais, a área da figura III é igual a 8 cm².

Questão 04 – Letra C

Eixo cognitivo: IV

Competência de área: 3

Habilidade: 14

Comentário: Considere a figura a seguir:

A área do quadrado de lado AE vale $A_I = x^2$.
Seja ℓ a medida dos lados do quadrado para que sua área corresponda a exatamente 6% da área do retângulo. Assim, temos que:

$$\ell^2 = \frac{6}{100}.5x.10x \Rightarrow \ell^2 = 3x^2$$

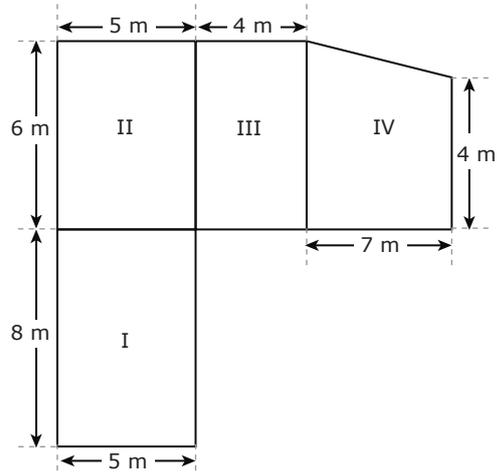
Portanto, para atingir o limite determinado, a área do quadrado deve ser triplicada.

Questão 05 – Letra C

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 2

Habilidade: 8

Comentário: Calculando as áreas de cada ambiente, temos:

$A_I = 5.8 \Rightarrow A_I = 40$ m²
$A_{II} = 6,5 \Rightarrow A_{II} = 30$ m²
$A_{III} = 4.6 \Rightarrow A_{III} = 24$ m²

$$A_{IV} = \frac{(6+4).7}{2} \quad A_{IV} = 35\,m^2$$

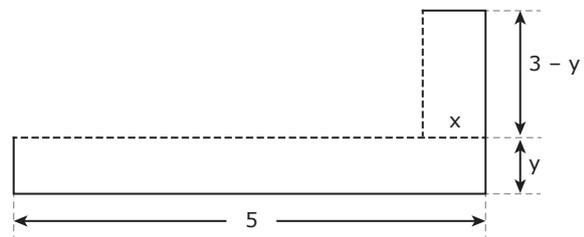
Pelos valores das áreas encontrados, temos que o modelo **A** deve ser instalado nos ambientes II e III, enquanto que o modelo **B** deve ser instalado nos ambientes I e IV.

Questão 06 – Letra E

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 2

Habilidade: 8

Comentário: Pela geometria da situação, temos a figura a seguir que representa a parte referente ao encolhimento do forro após a primeira lavagem:

A área da figura corresponde à parte perdida do forro, logo:
$A_{perdida} = 5.y + x.(3 - y) = 5y + 3x - xy$

Questão 07 – Letra D

Eixo cognitivo: V

Competência de área: 3

Habilidade: 14

Comentário: A área do trapézio, da figura I, em m², vale:

$$A_I = \frac{(30+20).2,5}{2} = 62,5$$

Já a área do trapézio, da figura II, em m², vale:

$$A_{II} = \frac{(49+41).2}{2} = 90$$

Como a velocidade **v** da água não se alterará e sendo **q** a vazão, em m³/s, esperada após a reforma da canaleta, temos:

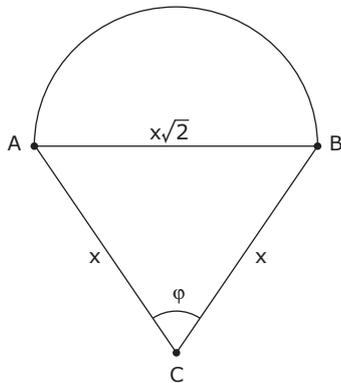
$$v = \frac{Q_I}{A_I} = \frac{Q_{II}}{A_{II}} \quad \frac{1\,050}{62,5} = \frac{q}{90} \Rightarrow q = 1\,512$$

MÓDULO – D 10

Áreas de círculo e suas partes

Exercícios de Fixação

Questão 01 – Letra A

Comentário: Observe a figura a seguir:

O triângulo ABC é isósceles, logo, AC = BC = x. Sendo $= \frac{\pi}{2}$, temos que o diâmetro $\overline{AB}$ do semicírculo é igual a $x\sqrt{2}$.

Calculando a área S(φ) do semicírculo, cujo raio é igual a $\frac{x\sqrt{2}}{2}$:

$$S(\ ) = \frac{1}{2}.\pi.\frac{x\sqrt{2}}{2}^{2} \quad S(\ ) = \frac{\pi}{2}.\frac{2x^2}{4} \quad S(\ ) = \frac{\pi x^2}{4}$$

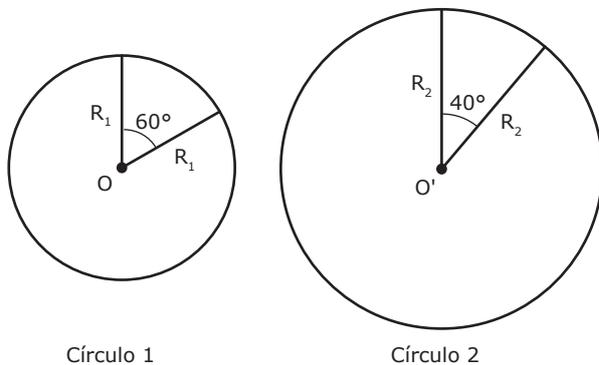
Calculando a área do triângulo ABC, retângulo em C, temos:

$$T(\ ) = \frac{x.x}{2} \quad T(\ ) = \frac{x^2}{2}$$

Logo,

$$\frac{S(\ )}{T(\ )} = \frac{\frac{\pi x^2}{4}}{\frac{x^2}{2}} = \frac{\pi x^2}{4}.\frac{2}{x^2} \quad \frac{S(\ )}{T(\ )} = \frac{\pi}{2}$$

Questão 02 – Letra B

Comentário: Considere as figuras a seguir:

Círculo 1 Círculo 2

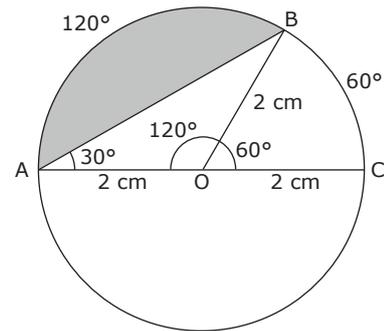
Sendo R_1 e R_2 os raios dos círculos, temos:

$$\frac{60°}{360°}.2\pi R_1 = \frac{40°}{360°}.2\pi R_2 \quad \frac{R_1}{R_2} = \frac{2}{3}$$

A razão entre a área do círculo I e a área do círculo II é:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\pi R_1^2}{\pi R_2^2} = \frac{R_1}{R_2}^{2} = \frac{2}{3}^{2} = \frac{4}{9}$$

Questão 03 – Letra A

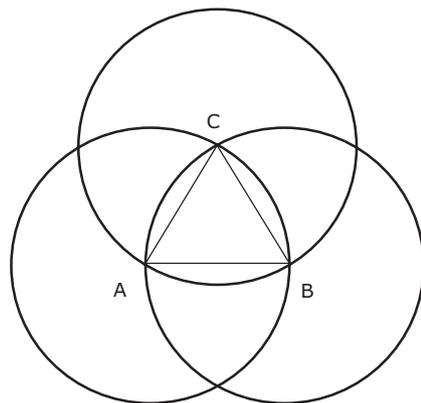
Comentário: Observe a figura a seguir:

Temos que $A\hat{O}B$ = 120°, logo, a área hachurada **A** é igual à diferença entre a área do setor cujo ângulo central mede 120° e a área do triângulo AOB, assim:

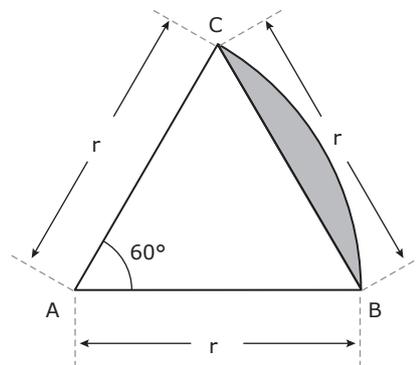
$$A = A_{setor} - A_{AOB} \quad A = \frac{\pi.2^2.120°}{360°} - \frac{2.2.\text{sen}\,120°}{2}$$

$$A = \frac{4\pi}{3} - 2.\underbrace{\text{sen}\,120°}_{\text{sen}\,60°} \quad A = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$$

Portanto, a área hachurada é igual a $\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$ cm².

Questão 04 – Letra B

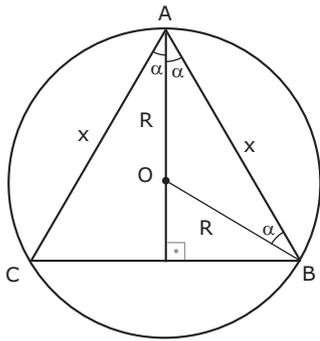
Comentário: Considere a figura a seguir:

Temos que AB = BC = CA = r. Logo, o triângulo ABC é equilátero de lado **r**, e sua área é $A_{\Delta ABC} = \frac{r^2\sqrt{3}}{4}$.

No setor circular a seguir, a área **A** do segmento circular é:

$$A = A_{setor} - A_{\Delta ABC} = \frac{\pi r^2.60°}{360°} - \frac{r^2\sqrt{3}}{4} \quad A = \frac{\pi r^2}{6} - \frac{r^2\sqrt{3}}{4}$$

Logo, a área **S** do Triângulo de Reuleaux é a soma das áreas dos três segmentos circulares (que têm o mesmo valor), com a área do triângulo equilátero ABC.

$$S = 3.A + A_{\Delta ABC} \Rightarrow S = 3.\frac{\pi r^2}{6} - \frac{r^2\sqrt{3}}{4} + \frac{r^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow S = \frac{\pi - \sqrt{3}}{2}r^2$$

Questão 05 – Letra E

Comentário: Considere a figura a seguir:

Sejam AB = AC = x e **R** o raio da circunferência circunscrita ao triângulo ABC.

Aplicando a Lei dos Cossenos no triângulo AOB, temos:

$x^2 = R^2 + R^2 - 2.R.R.\cos(180° - 2\alpha) \Rightarrow x^2 = 2R^2 + 2R^2.\cos 2\alpha$

A área do triângulo ABC é:

$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}.x.x.\text{sen } 2\alpha \Rightarrow A_{\Delta ABC} = \frac{(2R^2 + 2R^2.\cos 2\alpha).\text{sen } 2\alpha}{2} \Rightarrow$

$A_{\Delta ABC} = R^2.(1 + \cos 2\alpha).\text{sen } 2\alpha$

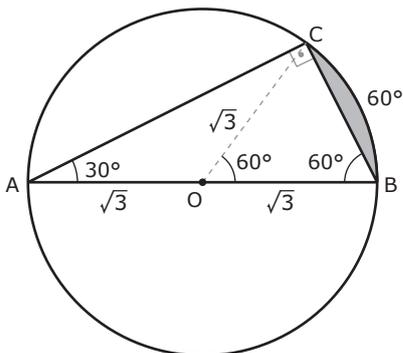
A área do círculo é $A_C = \pi R^2$.

Logo, a razão da área do triângulo ABC pela área do círculo é:

$$\frac{A_{ABC}}{A_C} = \frac{R^2.(1 + \cos 2\alpha).\text{sen } 2\alpha}{\pi R^2} = \frac{2}{\pi}.\text{sen } 2\alpha.\cos^2 \alpha$$

Exercícios Propostos

Questão 03 – Letra A

Comentário: Considere a figura a seguir:

Como AB é diâmetro, então $A\hat{C}B = 90°$ e $A\hat{B}C = 60°$.

Sendo **O** o centro da circunferência, traçando o raio OC, temos.

$C\hat{A}B = \frac{\overset{\frown}{CB}}{2} \Rightarrow 30° = \frac{\overset{\frown}{CB}}{2} \Rightarrow \overset{\frown}{CB} = 60°$

$C\hat{O}B = \overset{\frown}{CB} = 60°$

Logo, o triângulo COB é equilátero, e a área sombreada é:

$A = A_{setor} - A_{\Delta COB} \Rightarrow A = \frac{\pi(\sqrt{3})^2.60°}{360°} - \frac{(\sqrt{3})^2.\sqrt{3}}{4} \Rightarrow$

$A = \frac{\pi}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2$

Questão 04 – Letra B

Comentário: Considere as figuras a seguir:

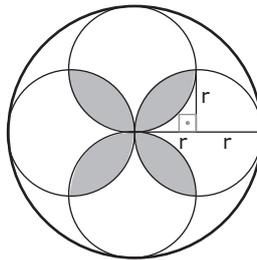
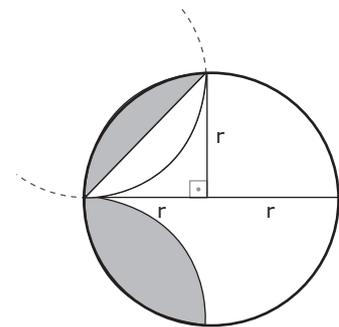



Figura I Figura II

A área sombreada da figura I, que é $8(\pi - 2)$, corresponde a oito vezes a área de um segmento circular de ângulo central 90° e raio **r**, como indicado na figura II. Assim, temos que:

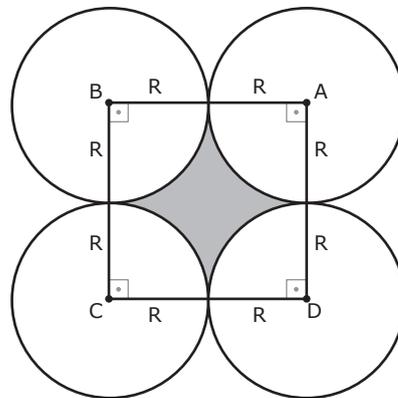
$8(\pi - 2) = 8\left(\frac{1}{4}\pi r^2 - \frac{1}{2}r^2\right) \Rightarrow r = 2$, pois $r > 0$

Logo, o raio do círculo externo vale 2r, ou seja, seu raio vale 4.

Assim, a área do círculo externo vale:

$A = \pi R^2 = \pi(4)^2 = 16\pi$

Questão 05 – Letra D

Comentário: Observe a figura a seguir:

Sendo **R** o raio das circunferências, temos que cada uma delas possui área igual a πR^2.

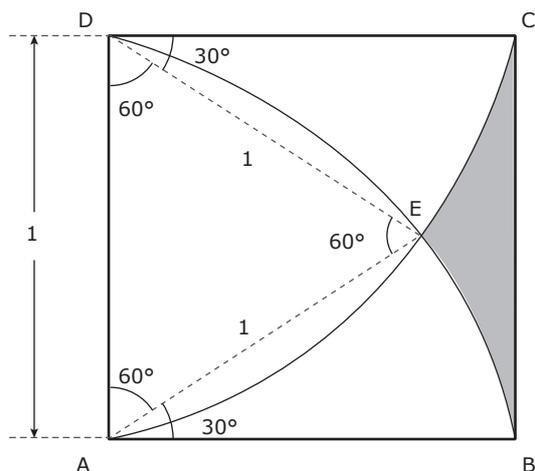
Unindo-se os centros **A**, **B**, **C** e **D** das circunferências, encontramos um quadrado de lado 2R; logo, a área hachurada será igual a:

$A = A_{ABCD} - A_{circunferência} \Rightarrow A = (2R)^2 - \pi R^2 \Rightarrow A = 4R^2 - \pi R^2$

Portanto, a razão entre a área de um círculo e a área **A** é

$$\frac{\pi R^2}{R^2(4 - \pi)} = \frac{\pi}{4 - \pi}$$

Questão 06 – Letra C

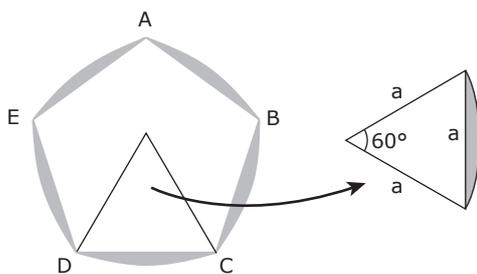
Comentário: Considere a figura a seguir:

Assim, o triângulo ADE é equilátero de lado 1.

Logo, a área hachurada é a diferença entre a área do quadrado, a área dos dois setores circulares DEC e ABE (que são iguais) e a área do triângulo ADE. Assim, temos que:

$$A = A_{ABCD} - 2.A_{ABE} - A_{\Delta\ ADE} \Rightarrow A = 1^2 - 2.\frac{\pi.1^2.30°}{360°} - \frac{1^2.\sqrt{3}}{4} \Rightarrow$$

$$A = 1 - \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}$$

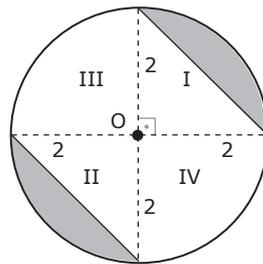
Questão 08 – Letra A

Comentário: Observe a figura a seguir.

O pentágono é regular de lado **a**. AB = BC = CD = DE = EA que são arcos de uma circunferência de raio também **a**, temos para cada setor, um triângulo equilátero. Para encontrarmos a área hachurada, basta calcularmos a área do setor cujo ângulo central é de 60° e subtrairmos a área do triângulo equilátero. Por se tratar de 5 setores, multiplicamos o resultado por 5. Logo:

$$A_{hachurada} = 5.\left(\frac{\pi.a^2.60°}{360°} - \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right) = 5.\left(\frac{\pi a^2}{6} - \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$A_{hachurada} = \frac{5a^2}{2}.\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Questão 12 – Letra C

Comentário: Observe a figura a seguir:

Temos que as áreas I e II correspondem, cada uma, à área de um triângulo retângulo isósceles cujos catetos medem 2 cm. Logo:

$$A_I + A_{II} = 2.\frac{2.2}{2} = 4\ cm^2$$

Temos que as áreas III e IV somadas correspondem à área de uma semicircunferência de raio igual a 2 cm. Logo:

$$A_{III} + A_{IV} = \frac{\pi.2^2}{2} = 2\pi\ cm^2$$

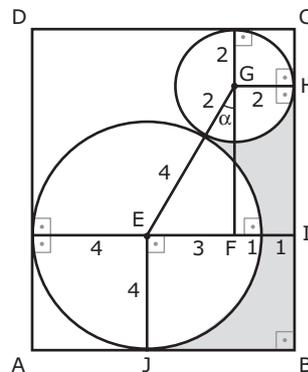
A área hachurada **A** será igual à diferença entre a área do círculo de raio = 2 cm e a soma das áreas das partes I, II, III e IV, assim:

$A = A_{cir.} - A_{(I+II+III+IV)} = \pi 2^2 - (4+2\pi) \Rightarrow$

$A = 4\pi - 4 - 2\pi \Rightarrow A = (2\pi - 4)\ cm^2$

Questão 14

Comentário:

1. Considere a figura a seguir:

Do triângulo EFG, temos que:

$$\text{sen}\ \alpha = \frac{EF}{EG} \Rightarrow \text{sen}\ \alpha = \frac{3}{6} \Rightarrow \alpha = 30°$$

$$\cos\ \alpha = \frac{FG}{EG} \Rightarrow \cos 30° = \frac{FG}{6} \Rightarrow FG = 3\sqrt{3}$$

Logo, o lado AD, em cm, mede:

$$AD = 4 + 3\sqrt{3} + 2 = 3\left(2 + \sqrt{3}\right)$$

2. A área da região sombreada, em cm^2, vale:

$$A = A_{JBIE} - A_{setor} + A_{EIHG} - A_{setor} - A_{setor} \Rightarrow$$

$$A = 5.4 - \frac{1}{4}.\pi 4^2 + \frac{(5+2)3\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{3}\pi 2^2 - \frac{1}{6}\pi 4^2 \Rightarrow$$

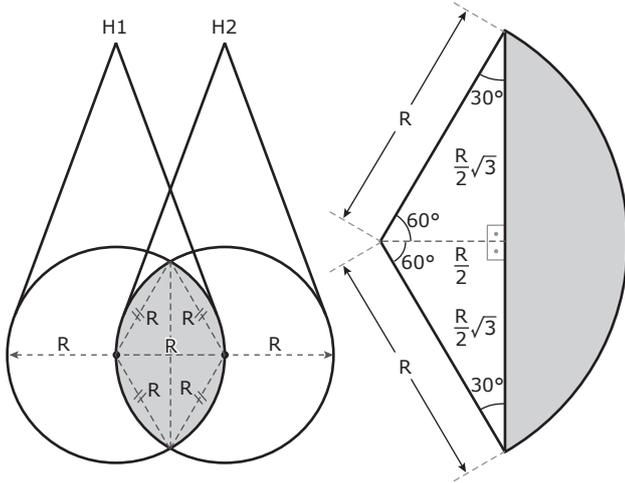
$$A = 20 + \frac{21\sqrt{3}}{2} - 8\pi$$

Questão 01 – Letra A

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 2

Habilidade: 8

Comentário: Considere a figura a seguir:

A área sombreada equivale a duas vezes a área de um segmento circular de ângulo central 120° e raio **R**. Assim, temos:

$$A = 2\,\frac{1}{3}\pi R^2 - \frac{1}{2}R\sqrt{3}.\frac{R}{2} \Rightarrow A = \frac{2\pi R^2}{3} - \frac{\sqrt{3}R^2}{2}\ \text{u.a.}$$

Questão 02 – Letra E

Eixo cognitivo: IV

Competência de área: 2

Habilidade: 9

Comentário: Os raios das tampas grandes, médias e pequenas são, em metros, respectivamente, 1, $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$.

As sobras de material A_I, A_{II} e A_{III} das tampas grandes, médias e pequenas são, respectivamente, em m²:

$$A_I = (2)^2 - \pi(1)^2 \Rightarrow A_I = (4 - \pi)\ m^2$$

$$A_{II} = (2)^2 - 4\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow A_{II} = (4 - \pi)\ m^2$$

$$A_{III} = (2)^2 - 16\pi\left(\frac{1}{4}\right)^2 \Rightarrow A_{III} = (4 - \pi)\ m^2$$

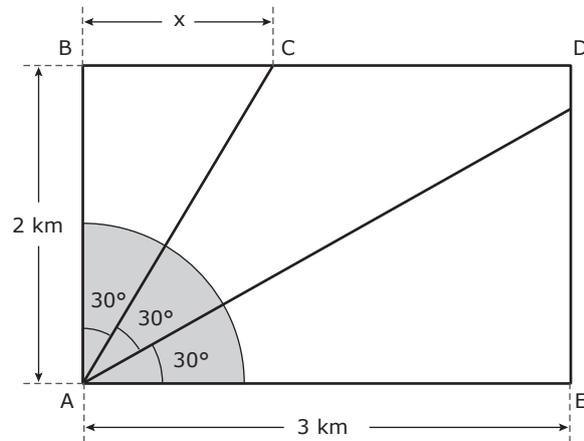
Portanto, se a empresa usar a mesma quantidade de chapas para produzir as tampas grandes, médias e pequenas, as sobras serão iguais, pois $A_I = A_{II} = A_{III}$.

Questão 03 – Letra E

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 2

Habilidade: 9

Comentário: Considere a figura a seguir:

Analisando o triângulo ABC, temos que:

$$\text{tg } 30° = \frac{x}{2} \quad \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{x}{2} \Rightarrow x = 2.0,58 \Rightarrow x = 1,16$$

Logo, sua área, em km², vale:

$$A_{ABC} = \frac{1,16.2}{2}$$

$$A_{ABC} = 1,16$$

Portanto, a porcentagem da área do triângulo ABC em relação à área do retângulo ABDE vale:

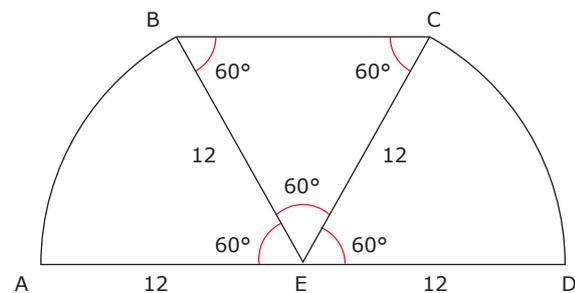
$$\frac{A_{ABC}}{A_{ABDE}} = \frac{1,16}{3.2} \quad 0,19 \quad 19\%$$

Questão 04 – Letra E

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 2

Habilidade: 9

Comentário: Considere a figura a seguir:

$$A = A_{AEB} + A_{\Delta\, BCE} + A_{CED} \Rightarrow$$

$$A = \frac{1}{6}.\pi.(12)^2 + \frac{(12)^2\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{6}.\pi.(12)^2 \Rightarrow$$

$$A = 48\pi + 36\sqrt{3}\ cm^2$$

MÓDULO – E 17

Polinômios I

Exercícios de Fixação

Questão 01 – Letra D

Comentário: Igualando os termos correspondentes, temos:

$$\begin{cases} a + b = -2 \\ a + c = 0 \quad \Rightarrow \quad c = -a \\ b + c = -5 \end{cases}$$

Portanto, podemos escrever:

$$\begin{aligned} a + b &= -2 \\ -a + b &= -5 \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema, temos $a = \frac{3}{2}$ e $b = -\frac{7}{2}$.

Assim, $c = -\frac{3}{2}$.

Logo, $a + b + c = \frac{3}{2} - \frac{7}{2} - \frac{3}{2} = -\frac{7}{2}$.

Questão 02 – Letra D

Comentário: Dividindo f(x) por g(x), obtemos:

$$\begin{array}{l|l} 6x^4 - x^3 - 9x^2 - 3x + 7 & 2x^2 + x + 1 \\ \underline{-6x^4 - 3x^3 - 3x^2} & 3x^2 - 2x - 5 \\ \quad -4x^3 - 12x^2 - 3x + 7 & \\ \quad \underline{4x^3 + 2x^2 + 2x} & \\ \qquad -10x^2 - x + 7 & \\ \qquad \underline{10x^2 + 5x + 5} & \\ \qquad\qquad 4x + 12 & \end{array}$$

Então, $q(x) = 3x^2 - 2x - 5$ e $r(x) = 4x + 12$. O produto das raízes de q(x) é dado por $-\frac{5}{3}$, enquanto que, em r(x), temos raiz igual a −3. Assim, o produto pedido é $-\frac{5}{3}.(-3) = 5$.

Questão 03 – Letra B

Comentário: Dividindo p(x) por d(x), obtemos:

$$\begin{array}{l|l} 2x^3 + 5x^2 + x + 17 & 2x^2 + nx + 4 \\ \underline{-2x^3 - nx^2 - 4x} & x + \frac{5 - n}{2} \\ (5 - n)x^2 - 3x + 17 & \\ \underline{-(5 - n)x^2 - \frac{(5 - n^2)}{2}x - (10 - 2n)} & \\ \left(\frac{-6 - 5n + n^2}{2}\right)x + 7 + 2n & \end{array}$$

Para que o resto da divisão seja 5,devemos ter:

$$\begin{aligned} &n^2 - 5n - 6 = 0 \qquad n = -1 \text{ ou } n = 6 \\ &2n + 7 = 5 \qquad\quad\;\; n = -1 \end{aligned}$$

Para satisfazer o sistema, temos que n = −1.

Questão 04 – Letra C

Comentário:

$p(x) = ax^2 + (a - 15)x + 1$ e $q(x) = 2x^2 - 3x + \frac{1}{b}$

Como as raízes são iguais, as somas das mesmas em cada um dos polinômios também são iguais. Portanto, temos que:

i) a soma das raízes de p(x) é $\frac{-a + 15}{a}$.

ii) a soma das raízes de q(x) é $\frac{3}{2}$.

Igualando esses valores, temos:

$$\frac{-a + 15}{a} = \frac{3}{2} \Rightarrow a = 6$$

Logo, $p(x) = 6x^2 - 9x + 1$.

Do mesmo modo, os produtos das raízes também são iguais. Então, temos que:

i) o produto das raízes de p(x) é $\frac{1}{6}$.

ii) o produto das raízes de q(x) é $\frac{1}{2b}$.

Igualando esses valores, temos:

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{2b} \Rightarrow b = 3$$

Portanto, a + b = 6 + 3 = 9.

Questão 05 – Letra A

Comentário: Temos que $q(x) = x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$.

i) O resto da divisão de p(x) por x + 1 é igual a p(−1).

$p(-1) = (-1)^{99} - 2(-1) + 3 = -1 + 2 + 3 = 4$

ii) O resto da divisão de p(x) por x − 1 é igual a p(1).

$p(1) = 1^{99} - 2.1 + 3 = 1 - 2 + 3 = 2$

$$\begin{array}{l|l} p(x) & q(x) \\ \hline r(x) & b(x) \end{array}$$

Observe que r(x) é do 1º grau, ou seja, é da forma r(x) = ax + b.

$p(x) = (x^2 - 1).b(x) + ax + b$

$p(-1) = 0.b(-1) - a + b = 4$

$p(1) = 0.b(1) + a + b = 2$

Resolvendo o sistema $\begin{matrix} -a + b = 4 \\ a + b = 2 \end{matrix}$, temos a = −1 e b = 3.

Portanto, r(x) = −x + 3.

Exercícios Propostos

Questão 01 – Letra E

Comentário:

$x^3 + (a - b)x^2 + (a - b - 2)x + 4 = x^3 + 2ax^2 + (3a - b)$

Igualando os coeficientes dos termos correspondentes, temos:

$\begin{cases} a - b = 2a \\ a - b - 2 = 0 \\ 3a - b = 4 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} a - b = 2a \\ a - b = 2 \\ 3a - b = 4 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} 2a = 2 \\ 3a - b = 4 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} a = 1 \\ 3a - b = 4 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$

Portanto, a.b = –1.

Questão 02 – Letra D

Comentário: Dividindo p(x) por q(x), obtemos:

$$\begin{array}{r|l} 4x^2 + 3x + 5 & 2x^2 - x - 1 \\ \underline{-4x^2 + 2x + 2} & 2 \\ 5x + 7 & \end{array}$$

Temos r(x) = 5x + 7. Assim:

$f(g(x)) = r(x) \quad 2.g(x) + k = 5x + 7 \quad g(x) = \dfrac{5x + 7 - k}{2}$

Sabendo que o conjunto solução da inequação $g(x) \geq 10$ é $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\}$, temos

$\dfrac{5x + 7 - k}{2} \geq 10 \quad 5x \geq k + 13 \quad x \geq \underbrace{\dfrac{k + 13}{5}}_{3}.$

Logo, $\dfrac{k + 13}{5} = 3 \quad k = 2.$

Questão 04 – Letra B

Comentário:

$P(x) = x^2 - 4$

$Q(x) = x^3 - 2x^2 + 5x + a$

$Q(2) = 2^3 - 2.2^2 + 5.2 + a = 0 \Rightarrow a = -10$

Logo, $Q(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 10$.

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 2x^2 + 5x - 10 & x^2 - 4 \\ \underline{-x^3 \qquad\quad + 4x \qquad} & x - 2 \\ -2x^2 + 9x - 10 & \\ \underline{2x^2 \qquad\quad - 8} & \\ 9x - 18 & \end{array}$$

Questão 05 – Letra D

Comentário:

$$\begin{array}{r|l} x^4 + 0x^3 + px^2 + 0x + q & x^2 + 2x + 5 \\ \underline{-x^4 - 2x^3 - 5x^2 \qquad\qquad} & x^2 - 2x + (p - 1) \\ -2x^3 + (p - 5)x^2 + 0x + q & \\ \underline{2x^3 + \quad 4x^2 \quad + 10x \quad} & \\ (p - 1)x^2 + 10x + q & \\ \underline{-(p - 1)x^2 - 2(p - 1)x - 5(p - 1)} & \\ (-2p + 12)x + (q - 5p + 5) = 0x + 0 & \end{array}$$

$\begin{cases} -2p + 12 = 0 \\ q - 5p + 5 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} p = 6 \\ q - 30 + 5 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} p = 6 \\ q = 25 \end{cases}$

Questão 06 – Letra C

Comentário:

$$\begin{array}{l|l} p(x) & q(x) \\ \hline x - 1 & \end{array}$$

Como o grau do resto deve ser menor do que o grau do divisor, o grau de q(x) é maior do que 1.

Questão 08 – Letra B

Comentário:

$P(x) = 2x^3 - 3x^2 + mx + n$

$Q(x) = x^2 - 3x + 2$

Resto: $R(x) = 2x + 1$

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - 3x^2 + mx + n & x^2 - 3x + 2 \\ \underline{-2x^3 + 6x^2 - 4x \qquad\quad} & 2x + 3 \\ 3x^2 + (m - 4)x + n & \\ \underline{-3x^2 + \quad 9x \quad - 6} & \\ R(x) = (m + 5)x + (n - 6) & \end{array}$$

Mas R(x) = 2x + 1. Logo, temos:

$(m + 5)x + (n - 6) = 2x + 1$

$\begin{cases} m + 5 = 2 \\ n - 6 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} m = -3 \\ n = 7 \end{cases}$

Questão 10 – Letra A

Comentário:

$P(x) = -x^5 + 2x^3 - x^2 + k^2$ é divisível por $D(x) = x^3 + 1$. Observe que x = –1 é raiz de D(x). Como P(x) é divisível por D(x), temos que x = –1 também é raiz de P(x). Temos:

$P(-1) = (-1)^5 + 2(-1)^3 - (-1)^2 + k^2 = 0 \Rightarrow k^2 = 4$

Questão 16 – Letra C

Comentário:

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 0x^2 + ax + b & x^2 + x + 2 \\ \underline{-x^3 - x^2 - 2x \qquad\qquad} & x - 1 \\ -x^2 + (a - 2)x + b & \\ \underline{-x^2 + x + 2 \qquad} & \\ (a - 1)x + b + 2 & \end{array}$$

Dado que o resto é igual a 4, temos:

$(a - 1)x + b + 2 = 4 \quad \begin{cases} a - 1 = 0 \\ b + 2 = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$

Assim, a + b = 3.

Seção Enem

Questão 01 – Letra B

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 5

Habilidade: 21

Comentário:

$p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

$p(0) = 0^3 + a.0^2 + b.0 + c = 2 \Rightarrow c = 2$

Reescrevendo o polinômio, temos $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2$.

$p(1) = 1^3 + a.1^2 + b.1 + 2 = 5 \Rightarrow a + b = 2$

$p(2) = 2^3 + a.2^2 + b.2 + 2 = 10 \Rightarrow 2a + b = 0$

Resolvendo o sistema $\begin{cases} a + b = 2 \\ 2a + b = 0 \end{cases}$, temos que $a = -2$.

Questão 02 – Letra D

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 5

Habilidade: 21

Comentário: $P(x) = x^3 - 7x^2 + 14x - 8$

Pesquisando as raízes racionais, verificamos 1, que é raiz. Temos:

1	1	−7	14	−8
	1	−6	8	0

O quociente é $Q(x) = x^2 - 6x + 8$.

Cálculo das raízes de Q(x):

$\Delta = (-6)^2 - 4.1.8 \Rightarrow \Delta = 4$

$$x = \frac{6 \pm 2}{2} \quad \begin{matrix} x = 2 \\ \text{ou} \\ x = 4 \end{matrix}$$

Portanto, são três raízes reais, ou seja, o robô bombeiro será utilizado três vezes.

MÓDULO – E 18

Polinômios II

Exercícios de Fixação

Questão 01 – Letra B

Comentário:

$$\begin{array}{l|l} p(x) & x^2 - 4 \\ \hline 3x + 5 & B(x) \end{array}$$

$p(x) = B(x).(x^2 - 4) + 3x + 5$

O resto da divisão de p(x) por x + 2 é igual a p(−2).

$p(-2) = B(-2).[(-2)^2 - 4)] + 3.(-2) + 5 \Rightarrow$

$p(-2) = B(-2).0 - 6 + 5 = -1$

Questão 02 – Letra B

Comentário: Aplicando o dispositivo prático de Briot-Ruffini, obtemos:

−1	1	2	−5	−6
2	1	1	−6	0
	1	3	0	

Perceba que o polinômio $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ tem raízes −1, 2 e −3, podendo ser escrito como $(x + 1)(x - 2)(x + 3)$. Logo, a divisão de $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ por $(x + 1)(x - 2)$ é igual a $x + 3$.

Questão 03 – Letra C

Comentário:

$-2r - 5 = 7 \Rightarrow r = -6$

Além disso, $q = 1$.

Logo, $-2.1 + p = -4 \Rightarrow p = -2$.

Raiz de $x + a \Rightarrow -a = -2 \Rightarrow a = 2$

Questão 04 – Letra B

Comentário: Aplicando o Método de Briot-Ruffini:

2	2	−7	3	8	−4
2	2	−3	−3	2	0
	2	1	−1	0	

Obtemos $2x^2 + x - 1 = 0$, cujas raízes somam $-\frac{b}{a} = -\frac{1}{2}$.

Questão 05 – Letra A

Comentário:

$p(x) = x^3 + ax^2 + bx$

$p(2) = 2$ e $p(1) = 4$

Mas $p(1) = 1^3 + a.1^2 + b.1 = 4 \Rightarrow a + b = 3$.

Mas $p(2) = 2^3 + a.2^2 + b.2 = 2 \Rightarrow 4a + 2b = -6 \Rightarrow 2a + b = -3$.

Resolvendo o sistema $\begin{cases} a + b = 3 \\ 2a + b = -3 \end{cases}$, temos que $a = -6$ e $b = 9$.

Exercícios Propostos

Questão 01 – Letra D

Comentário: Dado que os restos são iguais quando p(x) é dividido por (x − 1) ou (x + 1), aplicando o Teorema do Resto, temos:

$P(1) = P(-1)$

$3.1^4 - 2.1^3 + m.1 + 1 = 3.(-1)^4 - 2.(-1)^3 + m.(-1) + 1$

$3 - 2 + m + 1 = 3 + 2 - m + 1$

$2m = 4$

$m = 2$

Questão 02 – Letra C

Comentário: Como p(x) é divisível por x + 3, por x – 1 e por x + 5, p(x) admite pelo menos três raízes, ou seja, o seu grau é maior ou igual a 3.

Questão 03 – Letra A

Comentário:

P(x) = ax + b

P(2) = a.2 + b = 0 ⇒ 2a + b = 0

P(–2) = a.(–2) + b = 4 ⇒ –2a + b = 4

Resolvendo o sistema $\begin{cases} 2a + b = 0 \\ -2a + b = 4 \end{cases}$, temos que a = –1 e b = 2.

Portanto, P(x) = –x + 2.

Questão 05 – Letra A

Comentário:

Raízes de $x^2 - 6x + 5$:

Δ = 16 ⇒ x' = 1 e x" = 5

Esses números são também raízes de $x^4 + px^2 + q$. Portanto, para x = 1 ⇒ $1^4 + p.1^2 + q = 0$ ⇒ p + q = –1.

Questão 07 – Letra E

Comentário: O resto da divisão de P(x) por x + 1 é igual a P(–1). Temos que $P(x) = Q(x).(x^2 - x - 2) + 2x - 1$.

Então:

$P(-1) = Q(-1).[(-1)^2 - (-1) - 2] + 2.(-1) - 1 \Rightarrow$

P(–1) = – 3

Questão 08 – Letra B

Comentário: Seja $p(x) = 5x^3 + (2a - 3)x^2 + ax - 2$. O resto da divisão de p(x) por x + 2 é igual a p(–2).

Logo:

$p(-2) = 5(-2)^3 + (2a - 3)(-2)^2 + a(-2) - 2 = 6 \Rightarrow$

–40 + 8a – 12 – 2a – 2 = 6 ⇒ 6a = 60 ⇒ a = 10

Questão 11 – Letra E

Comentário: Sabe-se que $P(x) = (6x^2 + 5x + 3).(x^2 - x) - 7x$.

O resto da divisão de P(x) por 2x + 1 é igual a $P\left(-\frac{1}{2}\right)$.

Temos:

$$P\left(-\frac{1}{2}\right) = 6\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 5\left(-\frac{1}{2}\right) + 3\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right)\right] - 7\left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow$$

$$P\left(-\frac{1}{2}\right) = 5$$

Questão 16 – Letra E

Comentário: Se o polinômio é divisível por (x – 3), temos p(3) = 0, ou seja:

$6.3^3 - 4.3^2 + 2.m.3 - (m + 1) = 0 \Rightarrow$

162 – 36 + 6m – m – 1 = 0 ⇒

5m = –125 ⇒ m = –25

Logo, $\sqrt{|-25|} = 5$.

Seção Enem

Questão 01 – Letra B

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 5

Habilidade: 21

Comentário: Efetuando a divisão de $-x^3 + 8x^2 - 19x + 12$ por x – 1 pelo Método de Briot-Ruffini, temos:

1	–1	8	–19	12
	–1	7	–12	0

Logo, o lucro pode ser escrito como $L(x) = -x^2 + 7x - 12$. O valor da produção que corresponde à máxima lucratividade é igual à abscissa do vértice da parábola, ou seja:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{7}{2(-1)} = 3{,}5 \text{ toneladas}$$

MÓDULO – E 19

Equações polinomiais I

Exercícios de Fixação

Questão 01 – Letra A

Comentário: Cálculo da área livre da sala: $A = 131 - 20x + x^2$.

Volume livre da sala:

$V = (131 - 20x + x^2)x \Rightarrow V = x^3 - 20x^2 + 131x$

Queremos que o volume livre da sala seja igual a 280 m³, ou seja:

$x^3 - 20x^2 + 131x = 280 \Rightarrow x^3 - 20x^2 + 131x - 280 = 0$

Logo, o menor valor de **x** que atende a essa condição é 5, pois $5^3 - 20.5^2 + 131.5 - 280 = 0$

Questão 02 – Letra A

Comentário:

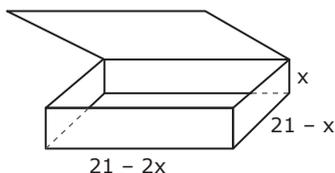
$p(x) = 7x(x - 1)^2(2x - 2)$

Calculando as raízes, temos:

$p(x) = 0 \Rightarrow 7x(x - 1)^2(2x - 2) = 0 \Rightarrow$

$x = 0$	$x = 0$
ou	ou
$(x-1)^2 = 0$	$x = 1$ (raiz dupla)
ou	ou
$2x - 2 = 0$	$x = 1$ (raiz simples)

Portanto, 1 é raiz tripla.

Questão 03 – Letra C

Comentário:

$(21 - x)(21 - 2x)x = 810 \Rightarrow 2x^3 - 63x^2 + 441x - 810 = 0$

Sabendo que 3 é uma das raízes, temos:

3	2	–63	441	–810
	2	–57	270	0

$2x^2 - 57x + 270 = 0$ → $x = 22,5$ (não convém) ou $x = 6$

Questão 04

Comentário:

A) Para que p(x) seja um polinômio, **a** deve ser igual a zero. Do contrário, p(x) é uma função trigonométrica.

B) $p(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$

$p(x) = 0 \Rightarrow x^3 - 3x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 3x + 2) = 0 \Rightarrow$

$x = 0$ ou $x^2 - 3x + 2 = 0$ → $x = 0$ ou $x' = 1$ ou $x'' = 2$

Portanto, S = {0, 1, 2}.

Questão 05

Comentário:

$p(x) = x^3 - 12x + 16$

A) $p(2) = 2^3 - 12.2 + 16 = 8 - 24 + 16 = 0$

B) p(x) é divisível por x – 2.

2	1	0	–12	16
	1	2	–8	0

$B(x) = x^2 + 2x - 8$

As raízes de B(x) são –4 e 2.

Assim, escrevendo p(x) na forma fatorada, temos:

$p(x) = (x - 2)^2(x + 4)$

Para $x > 0$ e $x \neq 2$, as duas parcelas acima são positivas, ou seja, $p(x) > 0$. (c.q.d.).

Exercícios Propostos

Questão 01 – Letra A

Comentário:

$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2+2}$ e $g(x) = \frac{x^2+4}{x^2+3}$

$f(x) = g(x) \Rightarrow \frac{x^2+1}{x^2+2} = \frac{x^2+4}{x^2+3} \Rightarrow$

$(x^2 + 1)(x^2 + 3) = (x^2 + 2)(x^2 + 4) \Rightarrow$

$x^4 + 4x^2 + 3 = x^4 + 6x^2 + 8 \Rightarrow$

$x^2 = -\frac{2}{5}$ (não possui raízes reais)

Logo, não há pontos de interseção.

Questão 03 – Letra D

Comentário:

$f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 9$ é divisível por $g(x) = x^2 - 2x + 3$.

$$\begin{array}{r|l} x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 0x - 9 & x^2 - 2x + 3 \\ -x^4 + 2x^3 - 3x^2 \qquad\qquad & x^2 - 2x - 3 = q(x) \\ \hline -2x^3 + x^2 + 0x - 9 & \\ +2x^3 - 4x^2 + 6x \quad & \\ \hline -3x^2 + 6x - 9 & \\ +3x^2 - 6x + 9 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Raízes de q(x): x' = –1 e x" = 3

Questão 04 – Letra C

Comentário:

$p(x) = (x^2 + 1)(x - 1)(x + 1)$

Fazendo $p(x) = 0$, temos:

$$\begin{array}{ll} x^2 + 1 = 0 & x^2 + 1 = 0 \text{ (não possui raízes reais)} \\ \text{ou} & \text{ou} \\ x - 1 = 0 & x = 1 \\ \text{ou} & \text{ou} \\ x + 1 = 0 & x = -1 \end{array}$$

Portanto, o polinômio tem duas raízes reais.

Questão 06 – Letra B

Comentário:

$x^4 - 8x^2 + 16 = 0 \Rightarrow (x^2 - 4)^2 = 0 \Rightarrow$

$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$

Questão 07 – Letra A

Comentário:

$x^4 - 10x^2 + 9 = 0 \Rightarrow x^4 - x^2 - 9x^2 + 9 = 0 \Rightarrow$

$x^2(x^2 - 1) - 9(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow (x^2 - 1)(x^2 - 9) = 0 \Rightarrow$

$(x + 1)(x - 1)(x + 3)(x - 3) = 0$

Logo, as raízes são –3, –1, 1, 3.

$a = 3$ e $b = -3 \Rightarrow a - b = 3 - (-3) = 6$

Questão 09 – Letra D

Comentário:

$$\left(1 - \sqrt{2}\right)x^3 - 1 - \sqrt{2} = 0 \Rightarrow x^3 = \frac{1 + \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$x^3 = -\left(1 + \sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow x = -\left(1 + \sqrt{2}\right)^{\frac{2}{3}}$$

Questão 12 – Letra C

Comentário:

$x^2 + x + 1 = 0$

$\Delta = -3$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{3i^2}}{2} \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}\,i}{2}$$

Raízes: $\frac{-1 - \sqrt{3}\,i}{2}$ e $\frac{-1 + \sqrt{3}\,i}{2}$

$x^3 - 1 = 0 \Rightarrow (x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$

Suas raízes são $\frac{-1 - \sqrt{3}\,i}{2}$, $\frac{-1 + \sqrt{3}\,i}{2}$ e 1.

Questão 14 – Letra C

Comentário:

$p(x) = (x - 1)^2(x^2 - 1)$

Cálculo das raízes de $p(x)$:

$p(x) = 0 \Rightarrow (x - 1)^2.(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow (x - 1)^2 = 0 \Rightarrow$

$x = 1 \rightarrow$ Raiz de multiplicidade 2

Além disso,

$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

Logo, 1 é raiz tripla.

Seção Enem

Questão 01 – Letra A

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 5

Habilidade: 21

Comentário: A questão pede um outro instante, além de $t = 0$, em que o volume de leite em ambos reservatórios seja o mesmo. Para isso, vamos igualar as funções que descrevem esses volumes ao longo do tempo:

$$V_1(t) = V_2(t) \quad 250t^3 - 100t + 3\,000 = 150t^3 + 69t + 3\,000$$

$$100t^3 - 169t = 0 \quad t(100t^2 - 169) = 0$$

$$t = 0$$

ou

$$100t^2 - 169 = 0 \quad t = \pm\frac{13}{10} = \pm 1{,}3 \quad (-1{,}3 \text{ não convém})$$

Portanto, um outro instante em que $V_1 = V_2$ é $t = 1{,}3$ h.

MÓDULO – E 20

Equações polinomiais II

Exercícios de Fixação

Questão 01 – Letra D

Comentário:

$x^3 - 10x^2 - 2x + 20 = 0$

Raízes: **a**, **b**, **c**

$$\begin{array}{l} a + b + c = 10 \\ ab + ac + bc = -2 \\ abc = -20 \end{array}$$

$a^2bc + ab^2c + abc^2 = abc(a + b + c) = (-20).10 = -200$

Questão 02 – Letra A

Comentário: Por inspeção, $x = -1$ é raiz de **f**. Aplicando o dispositivo prático de Briot-Ruffini, temos:

–1	1	9	23	15
	1	8	15	0

Desse modo, reescrevendo **f**, encontramos

$$f(x) = (x + 1)(x^2 + 8x + 15).$$

Logo, as outras raízes são $x = -3$ e $x = -5$. Assim, a soma pedida é

$$2^a + 2^b + 2^c = 2^{-1} + 2^{-3} + 2^{-5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} = \frac{21}{32}$$

Questão 03 – Letra A

Comentário:

$p(x) = x^4 - x^3 - 14x^2 + 2x + 24$

O produto das 4 raízes é igual a 24. Como o produto de duas delas é igual a −12, o produto das outras duas é igual a −2.

Questão 04 – Letra E

Comentário:

$p(x) = cx^3 + ax^2 + bx + 2c$

Sejam −1, 1 e x_1 as raízes de p(x).

O seu produto é dado por:

$(-1).1.x_1 = -\frac{2c}{c} \Rightarrow x_1 = 2$

Questão 05 – Letra B

Comentário: Pelo dispositivo prático de Briot-Ruffini:

1	1	−3	4	−2
	1	−2	2	0

Obtemos um novo polinômio de grau 2:

$$x^2 - 2x + 2 = 0 \quad x = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2.1} = \frac{2 \pm 2i}{2} \quad x = 1 + i \text{ ou } x = 1 - i$$

Assim, as outras duas raízes são 1 + i e 1 − i.

Exercícios Propostos

Questão 01 – Letra D

Comentário:

$p(x) = x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

Sejam x_1, x_2 e x_3 raízes pares e x_4 a raiz ímpar. Assim, temos que: $\underbrace{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}_{\text{ímpar}} = -b$

Logo, **b** é ímpar.

$$\underbrace{x_1x_2}_{\text{par}} + \underbrace{x_1x_3}_{\text{par}} + \underbrace{x_1x_4}_{\text{par}} + \underbrace{x_2x_3}_{\text{par}} + \underbrace{x_2x_4}_{\text{par}} + \underbrace{x_3x_4}_{\text{par}} = c$$

Logo, **c** é par.

$$\underbrace{x_1x_2x_3}_{\text{par}} + \underbrace{x_1x_2x_4}_{\text{par}} + \underbrace{x_1x_3x_4}_{\text{par}} + \underbrace{x_2x_3x_4}_{\text{par}} = -d$$

Logo, **d** é par.

$$\underbrace{x_1x_2x_3x_4}_{\text{par}} = e$$

Logo, **e** é par.

Há 3 coeficientes pares.

Questão 02 – Letra D

Comentário:

$p(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow S = -\frac{b}{a}$

$p(x - 1) = a(x - 1)^2 + b(x - 1) + c \Rightarrow$

$p(x - 1) = a(x^2 - 2x + 1) + bx - b + c \Rightarrow$

$p(x - 1) = ax^2 - 2ax + a + bx - b + c \Rightarrow$

$p(x - 1) = ax^2 + (b - 2a)x + a - b + c \Rightarrow S_1 = \frac{2a - b}{a}$

Logo, $S_1 - S = \frac{2a - b}{a} - \left(-\frac{b}{a}\right) = 2.$

Questão 03 – Letra E

Comentário: $8x^3 + kx^2 - 18x + 9 = 0$

Raízes: **a**, −a e x_1

$x_1 + a - a = -\frac{k}{8} \Rightarrow x_1 = -\frac{k}{8}$

Substituindo na equação, temos:

$8\left(-\frac{k}{8}\right)^3 + k\left(-\frac{k}{8}\right)^2 - 18\left(-\frac{k}{8}\right) + 9 = 0 \Rightarrow$

$-\frac{k^3}{64} + \frac{k^3}{64} + \frac{9}{4}k + 9 = 0 \Rightarrow k = -4$

Questão 05 – Letra A

Comentário:

$p(x) = x^3 - 6x^2 + 11x + k$

Sejam x_1, x_2 e x_3 as raízes de p(x). Temos:

$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{-(-6)}{1} = 6$

Mas $x_1 + x_2 = 3$. Logo, $x_3 = 3$.

Portanto, p(3) = 0. Assim, temos:

$3^3 - 6.3^2 + 11.3 + k = 0 \Rightarrow 27 - 54 + 33 + k = 0 \Rightarrow k = -6$

Questão 07 – Letra A

Comentário:

$2x^3 - x^2 + kx + 4 = 0$

Raízes: x_1, x_2, x_3. Sejam x_1 e x_2, tais que:

$x_1.x_2 = 1$

$x_1.x_2.x_3 = -\frac{4}{2} \Rightarrow x_3 = -2$

Logo, −2 é raiz.

$2(-2)^3 - (-2)^2 + k(-2) + 4 = 0 \Rightarrow k = -8$

Questão 09 – Letra B

Comentário: Sejam x_1 e x_2 as raízes. Temos:

$x_1.x_2 = 27$

Uma das raízes é 3, e a outra é 9.

Soma das raízes = −b

$3 + 9 = -b \Rightarrow b = -12$

Questão 13 – Letra D

Comentário: Pelas Relações de Girard, temos que:

$r + t + s = -a$

$rs + ts + tr = b \qquad s(r + t) + rt = b$

Dado que $s^2 = rt$, vamos substituir na segunda equação:

$s(r + t) + s^2 = b \qquad s\underbrace{(r + t + s)}_{-a} = b \qquad s = -\frac{b}{a}$

Substituindo $s = -\frac{b}{a}$ em $r + t + s = b$, temos:

$r + t - \frac{b}{a} = -a \qquad r + t = \frac{b}{a} - a$

Questão 15 – Letra B

Comentário: Utilizando a soma de Girard e considerando x_2 e x_3 as outras duas raízes da equação, temos:

$2i + x_2 + x_3 = -\frac{a}{1} \qquad x_2 + x_3 = -a - 2i$

Questão 18 – Letra A

Comentário:

$x^5 - 8x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x^3 - 8) = 0 \Rightarrow x^2(x - 2)(x^2 + 2x + 4) = 0$

Resolvendo a equação produto, temos:

$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ (raiz dupla)

$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$ (raiz simples)

$x^2 + 2x + 4 = 0$ (raízes complexas)

A soma das raízes imaginárias será dada por

$S = -\frac{b}{a} = -\frac{2}{1} = -2$

Seção Enem

Questão 01 – Letra A

Eixo cognitivo: IV

Competência de área: 1

Habilidade: 4

Comentário: $a = 63$ e $b = -316$

$E = {-\frac{316}{2}}^{2} + {\frac{63}{3}}^{3} = (-158)^2 + 21^3 \Rightarrow$

$E = 24\,964 + 9\,261 = 34\,225$

$x = \sqrt[3]{158 + 185} + \sqrt[3]{158 - 185}$

$x = 7 - 3 = 4$ (é uma raiz racional)

Questão 02 – Letra E

Eixo cognitivo: IV

Competência de área: 1

Habilidade: 21

Comentário: Admitindo-se que $P(x) = -1\,163$, temos:

$x^3 - 34x^2 + 381x - 1\,511 = -1\,163 \Rightarrow$

$x^3 - 34x^2 + 381x - 348 = 0$

Pelas Relações de Girard, o produto das raízes desse polinômio é dado por $-\frac{(-348)}{1} = 348$.